МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

Третья серия

выпуск 1

МЦНМО 1997

Адрес редакции:
121002, Москва, Б. Власьевский пер., д.11, к. 211
(с пометкой «Математическое просвещение»)

Email: matpros@mccme.ru

Полный вариант первого номера новой серии сборника «Математическое просвещение» (предварительная публикация первого номера: Математическое просвещение, сер. 3, вып. 1, М.: изд-во МК НМУ, 1995).

Предполагается, что сборники новой серии «Математического просвещения» будут содержать материалы по следующим разделам: проблемы современной математики, популярные лекции для школьников и студентов, материалы по истории и методологии математики, проблемы математического образования, научно-методические сообщения, хроника математической жизни, олимпиады и другие математические соревнования, задачи и проблемы. Большинство этих разделов представлено и в данном сборнике.

Хотя сборник и рассчитан на широкий круг любителей математики: школьников, студентов, преподавателей, уровень некоторых статей в нём, впрочем, требует значительных усилий со стороны читателя. Подобное чтение может быть рекомендовано тем, кто хочет всерьёз разбираться с математическими вопросами, затрагиваемыми в статьях сборника.

ISBN 5-900916-15-4

Выпуск данного сборника поддержан грантом
Российского Фонда Фундаментальных Исследований
(номер проекта 96-01-14087)

О новой серии сборников «Математическое просвещение»

Традиция издания популярной и научно-популярной литературы по математике имеет давнюю и богатую историю. Упомянем о выходивших в дореволюционной России сборниках «Новые идеи в математике» под редакцией замечательного деятеля математического просвещения профессора А. В. Васильева, о журналах «Вестник опытной физики и элементарной математики» и «Математическое образование», где обсуждались педагогические проблемы; о замечательных изданиях советского периода: серии «Популярные лекции по математике», где печатались лекции для школьников, читавшиеся знаменитыми учеными; сборниках под названием «Математическое просвещение» (две серии — довоенная и серия 1958–1961 гг.); об организованном в конце шестидесятых годов журнале «Квант».

Редакция новой серии сборников «Математическое просвещение» надеется продолжить эту славную традицию. Мы представляем сборники новой серии прежде всего как связующее звено между специальной и популярной математической литературой. Статьи в специальных журналах обычно недоступны неспециалистам, популярные материалы обычно ограничены жестким требованием «это обязательно должно быть понятно школьнику». Мы надеемся реализовать несколько иной принцип «это должно быть понятно вдумчивому и настойчивому читателю, даже при отсутствии специальной подготовки».

Предполагается включать в сборники статьи о новых фундаментальных результатах, новых направлениях развития чистой и прикладной математики. Особенно существенным нам кажется прояснять связи между различными понятиями и областями науки. Именно широкая эрудиция (а не только узкий профессионализм) есть та отличительная черта традиционного математического образования в России, которую хочется сохранить.

Огромное число популярных математических изданий выходило и выходит ныне за рубежом. Достаточно назвать «American Mathematical Monthly» и «Mathematical Intelligencer», издающиеся в США, английскую «Mathematical Gazette», франко-швейцарский журнал «L'Enseignement mathematique». Редакция «Математического просвещения» надеется познакомить читателя с этими изданиями, помещая в сборники переводы статей из них.

Помимо статей математического содержания, предполагается публикация материалов, отражающих реальное состояние преподавания математики (прежде всего, в специализированных классах и школах, а также в педагогических институтах и университетах).

Сейчас по всей России проходит немало научных конференций школьников, учебных летних школ, различного рода соревнований по решению задач; мы постараемся отражать опыт наиболее удачных мероприятий такого рода.

Приглашение к сотрудничеству

Издание, замысел которого изложен выше, невозможно без активной читательской поддержки. Мы ждем от Вас, читатель, предложений, советов, материалов.

Содержание

Хроника математической жизни

Математический Центр в новом здании

А. Б. Сосинский

Любители прогуляться по старым арбатским переулкам давно обратили внимание на новое нарядное четырехэтажное здание на Большом Власьевском переулке. Оно стоит недалеко от того места, где Власьевский упирается в Сивцев Вражек, но не у самой проезжей части, а в глубине, отделенное от мостовой небольшим сквериком со старыми липами и небольшими елями. На удачно скадрированной фотографии (см. заставку) даже создается впечатление, что дом стоит не в центре столицы, а где-нибудь в Подмосковье. Прохожий, не разобравший на расстоянии небольшую вывеску у парадной входной двери, мысленно относит здание к одной из богатых коммерческих структур, устраивающих в последнее время «евроремонт» старых арбатских особняков.

Однако на вывеске написано «Московский Центр Непрерывного Математического Образования», и вхожи туда не бизнесмены при галстуках и в тройках, а люд с виду попроще – разнокалиберные математики, от школьников, учителей и студентов до всемирно известных ученых (впрочем, наружностью своей вовсе не примечательных).

Что это за Центр, чем там занимаются, каким образом ему досталось это вновь отстроенное (действительно на «евроуровне») помещение?

Предистория

Идея создания центра, как и многие другие связанные с математикой замечательные начинания, принадлежит Н. Н. Константинову. В Центре Николай Николаевич видел организационную основу своей многоплановой неформальной просветительско-математической деятельности: кружки, математические классы и специализированные школы, работа с учителями, Международный Турнир Городов (МТГ), Турнир Ломоносова, олимпиады, Независимый Московский Университет (НМУ).

Но как могли не имеющие серьезного финансирования «неформалы» получить в центре Москвы помещение? Здесь решающую роль сыграли, со стороны математиков, известные кружковцы и преподаватели матшкол Александр Шень и Иван Ященко (впрочем, что характерно, оба – еще и математики-исследователи международного класса), а со стороны московской администрации – префект Центрального Округа А. И. Музыкантский, окончивший в свое время мехмат МГУ. Он распорядился доремонтировать советский долгострой, многие годы не используемый своим владельцем, Департаментом Образования Москвы, не с тем, чтобы здание затем выгодно отдать какой-либо богатой коммерческой организации, а просто на благо всей московской математической общественности. За достройкой и отделкой здания, как и за выбором оборудования и мебели, с неотступным вниманием следил еще один выпускник мехмата, казначей Центра Виктор Фурин. Как водится, открытие несколько раз откладывалось, но долгожданный день наконец наступил. Вспомним, как это было.

Открытие Центра

Официальное открытие было назначено на 19 часов 26 сентября 1996 г. К этому времени перед сияющим новой краской зданием собрался весь московский математический бомонд. Здесь можно было увидеть и маститых ученных из бывшего советского истеблишмента, и аспирантов в старых джинсах, испачканных мелом при проведении школьных кружков, студентов Независимого Университета, еще не обживших новое здание, журналистов и даже дипломатов.

Прошло назначенное время, а торжественная церемония разрезания ленты, которую должны были произвести мэр города Юрий Лужков и председатель Попечительского Совета Центра Владимир Арнольд, все не начиналась. Мэр опаздывал. Вскоре поступило сообщение, что его и не будет: задержали более важные политические дела.

С кратким вступительным словом тогда выступил Александр Музыкантский (в чем была известная доля справедливости, ведь здание Центра — его детище), и он же вместе с Арнольдом разрезал-таки символическую ленту. Затем все приглашенные поднялись в конференц-зал для продолжения официальной части. Несмотря на присутствие большого количества важных лиц из математического и околоматематического мира, открытие прошло в мажорной тональности, очень живо и достаточно быстро, не было характерных для подобных мероприятий длинных и скучных речей.

Среди выступающих были и президент Российской Академии Наук академик Ю. С. Осипов, декан НМУ Ю. С. Ильяшенко, отметивший преемственность замечательных традиций московской математической школы в делах НМУ и Центра, секретарь Отделения Математики РАН академик А. А. Гончар, атташе по культуре и науке Французского Посольства господин П. Арну, ректор Московского Государственного Университета член-корреспондент РАН В. А. Садовничий. Выступление ректора МГУ вызвало заметный интерес у преподавателей и особенно студентов Независимого Университета: было не только подчеркнуто, что оба учебных заведения выполняют, каждый по своему, общее дело, но обещана конкретная помощь в очень сложном для НМУ вопросе — прохождении военного дела (у НМУ нет своей военной кафедры).

Но наибольший интерес вызвало выступление В. И. Арнольда. Владимир Игоревич был в ударе, его речь неоднократно прерывалось смехом и аплодисментами.

Торжественная часть завершилась присуждением стипендий московской мэрии школьникам — победителям Московских олимпиад и Турнира Городов, а также лучшим студентам НМУ.

На этом открытие не закончилось. Участники и гости разбрелись по коридорам нового здания, украшенным серьезными и шутливыми лозунгами (среди последних запомнился такой: «Всякое ли непрерывное математическое образование дифференцируемо?»), с тем чтобы посетить небольшие выставки, отражающие разные стороны деятельности Центра. В нескольких комнатах, с помощью плакатов, фотографий, схем и других наглядных материалов, была представлена работа кружков и олимпиад, Турнира Городов, Турнира Ломоносова и Независимого Университета. Здесь можно было лицезреть легендарный 20-литровый самовар, непременный спутник Константиновских коллективных вылазок на природу, или огромную географическую карту мира, утыканную цветными флажками, обозначающими те места, где в последние годы проводился МТГ.

Больше всего народу, однако, было на экспозиции НМУ, развернутой в читальном зале библиотеки. Привлекали внимание как огромный стенд с фотографиями под кратким названием «Мы», где была представлена целая коллекция видовых фотографий экзотических мест, в которые математическая судьба забрасывала в последние годы преподавателей НМУ, так и стенд об обменах студентами со знаменитой Парижской Эколь Нормаль Сюперьер (НМУ и ЭНС – породненные вузы) или роскошно изданные книги, подаренные НМУ Американским Математическим Обществом. О высоком научном уровне профессуры Независимого свидетельствовали выставленные на показ оттиски их статей и книги, в основном на английском языке – печальное знамение наших трудных времен.

Все действо завершилось, как принято, приемом (в помещении будущей столовой Центра): шампанское, изысканные угощения, околоматематические разговоры высоких и более скромных гостей, обмен впечатлениями. Настроение было, если можно так выразится, приподнято-изумленное: в наше время, и вдруг такой подарок математическому просвещению и науке!

А что сейчас?

Со времени открытия прошел почти целый учебный год. Независимый Университет прочно обосновался на Большом Власьевском. Кроме обязательных лекций и упражнений, там регулярно проводятся несколько научных семинаров, проходят парадные научные доклады приезжих отечественных и зарубежных ученых, с большим успехом идут занятия по французскому языку.

Помимо занятий со студентами, здесь ведутся (зачастую теми же студентами) кружки для школьников 6–10 классов. Центр стал привычным местом сбора ведущих московских учителей, в частности на еженедельных заседаниях методического семинара И. Ф. Шарыгина. С успехом в Центре прошла очередная Соросовская Олимпиада. В нем теперь концентрируется оргработа Турнира Городов и Турнира Ломоносова, здесь проходили заседания методической комиссии и оргкомитета Московской городской олимпиады.

Атмосфера непринужденности, благожелательности и надежды, царившая на открытии, в сочетании с настроем на самоотверженную работу, сохранилась в доме на Большом Власьевском и превратила его в притягательный центр для лучших людей, занимающихся математикой в Москве.

Студенческие чтения

О некоторых задачах псевдопериодической топологии

Академик РАН В. И. Арнольд

Лекция, прочитанная студентам Математического Колледжа Независимого Московского Университета 14 апреля 1992 г.

Один из моих учителей в математике, Иван Георгиевич Петровский, говорил: «Всем, что я сделал в математике, я обязан не столько тому, что я что-то знал, сколько тому, что я чего-то не знал». И добавлял: «Важнейшей информацией о проблеме является то, что она не решена». В этой лекции я постараюсь рассказать о некоторых нерешенных задачах «псевдопериодической топологии». Псевдопериодическая топология связана с квазикристаллами, поверхностями Ферми физики твердого тела, хаосом в теории динамических систем и с теорией чисел. Чем занимается псевдопериодическая топология, я постараюсь сейчас объяснить.

Рассмотрим целочисленную решетку $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. Под *периодичностью* некоторого объекта (свойства) будем понимать его инвариантность относительно сдвигов на векторы из $\mathbb{Z}^n$.

Например, линейная функция $ax + by$ не периодична на плоскости, но картина ее линий уровня $ax + by = c = \mathrm{const}$ периодична (см. рис. 1). Если a/b — рациональное число, то картина очень проста: разнесенная сдвигами прямая проходит через узлы решетки (рис. 2). Если a/b иррационально, картина устроена сложнее; в любом случае будем считать ее стандартной.

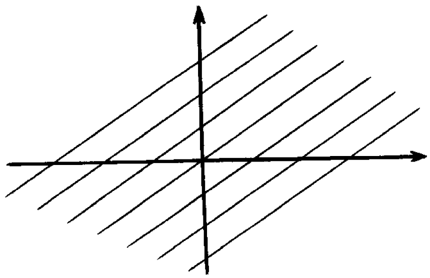


Рис. 1. *Периодичность системы линий уровня линейной функции.*

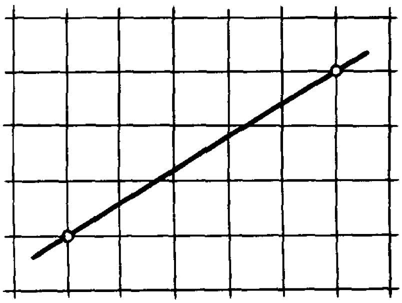


Рис. 2. *Резонансная линия уровня.*

Упражнение 1. *Выявите связь картины линий уровня линейной функции с разложением a/b в цепную дробь.*

Рассмотрим n-мерный тор $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ (факторпространство). В случае плоскости факторизация означает, что мы вырезаем единичный квадратик и склеиваем его противоположные стороны (рис. 3).

При этом прямая на плоскости превратится в *обмотку тора.* Если a/b иррационально, то эта обмотка является всюду плотной на торе. В трехмерном (аналогично в n-мерном) случае условием всюду плотного заполнения тора поверхностью уровня линейной функции является отсутствие резонанса. *Резонансом* называется такая ненулевая тройка целых чисел k, l, m, что $ak + bl + cm = 0$; здесь a, b, c — коэффициенты линейной функции $ax + by + cz$.

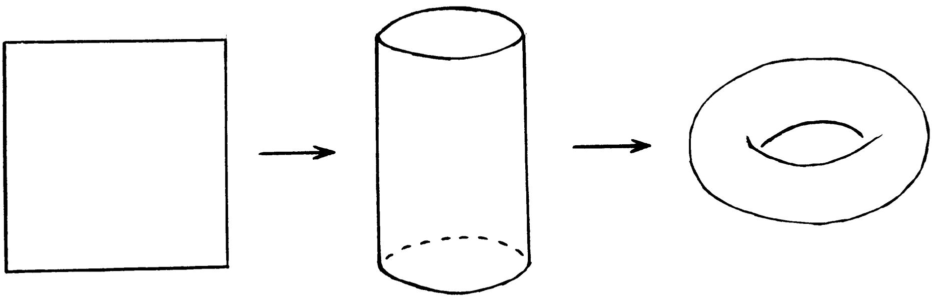


Рис. 3. *Тор как фактор плоскости по решетке.*

Определение. *Функция называется* псевдопериодической, *если она есть сумма нерезонансной линейной и периодической (с равными единице периодами по всем переменным) функций.*

Например, в одномерном случае псевдопериодической является функция $ax + b \cdot \sin 2\pi x$. В случае двух переменных псевдопериодической будет функция $ax + by + f(x, y)$, где

$$f(x + k, y + l) = f(x, y) \quad \forall (k, l) \in \mathbb{Z}^2.$$

Поскольку при целочисленных сдвигах линии уровня псевдопериодических функций переходят снова в линии уровня, эти семейства линий можно рассматривать на торе. Всегда ли при проектировании линии уровня на тор будет получаться гладкая кривая?

Чтобы свободно ориентироваться в подобных вопросах, надо превратить функции в привычную реальность! Например, представляйте себе функцию двух переменных как горную страну. Тогда вы увидите, что линии уровня высоты вовсе не обязаны быть гладкими (рис. 4).

Задача. *В том месте, где река вытекает из озера, его берега обычно образуют угол меньше развернутого (Нева, Свирь, Ангара). В месте впадения это не так. Почему?*

Особые точки возникают в тех местах, где касательная плоскость горизонтальна, т. е. $f'_x = f'_y = 0$. Периодическая добавка f к линейной функции $ax + by$ вполне может сделать касательную плоскость горизонтальной: там, где $a + f'_x = b + f'_y = 0$.

Итак, линии на торе могут оказаться как гладкими (пример: $f = 0$), так и с особенностями (рис. 5).

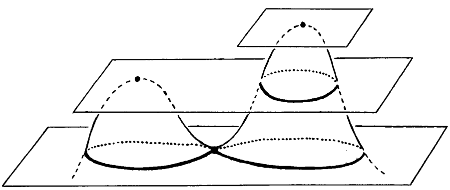


Рис. 4. *Особые и неособые линии уровня высоты.*

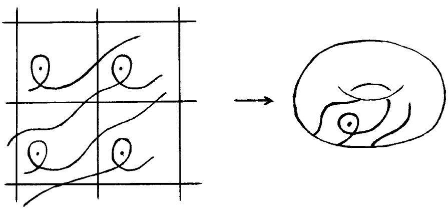


Рис. 5. *Псевдопериодические кривые на плоскости и их проекции на тор.*

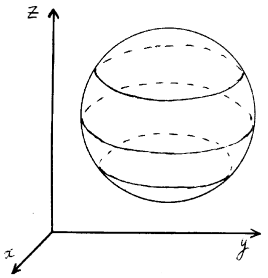


Рис. 6. *Стандартная функция высоты на сфере.*

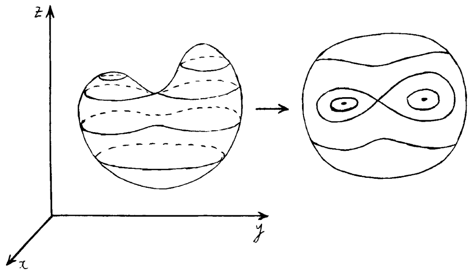


Рис. 7. *Функция высоты на продеформированной сфере.*

В многомерном случае речь идет о соответствующих поверхностях, линиях их особенностей и т. п.

Эта ситуация поставляет многочисленные нерешенные задачи.

Рассмотрим гладкую функцию на сфере. Простейшим примером такой функции является функция z высоты; на рис. 6 изображены ее линии уровня.

Произвольную гладкую функцию тоже можно интерпретировать как высоту на предварительно продеформированной сфере. Проделав обратную деформацию, получим на сфере картину линий уровня (рис. 7).

Займемся множеством *компонент связности* линий уровня. В случае функции z на сфере оно параметризуется значением функции, и *пространство компонент* представляет собой отрезок (рис. 8). Для примера, изображенного на рис. 7, пространство компонент представляет собой букву «Y» (рис. 9).

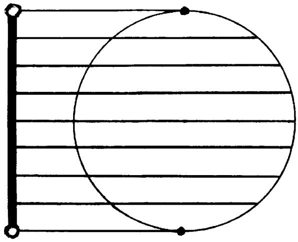


Рис. 8. *Пространство компонент линий уровня стандартной функции*

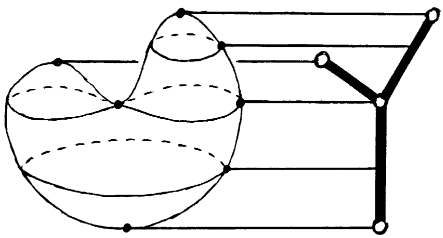


Рис. 9. *Дерево компонент множеств уровня функции высоты.*

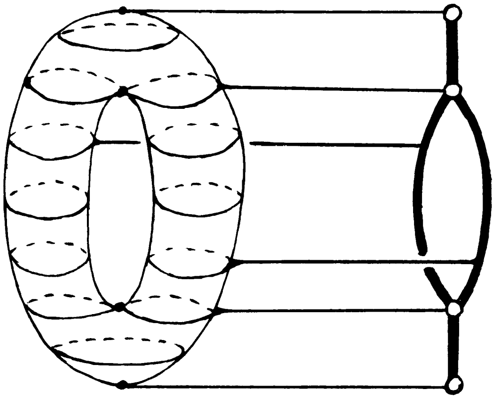


Рис. 10. *Пространство компонент линий уровня функции высоты на торе.*

Теорема. *Пространство компонент гладкой функции общего положения на сфере является конечным деревом; любое конечное дерево реализуется подходящим многочленом.*

Упражнение 2. *Дайте определение конечного дерева. Докажите, что число его вершин на 1 больше числа ребер.*

Замечание. Под функцией общего положения понимается функция из подходящего открытого всюду плотного множества в пространстве функций. Такую функцию в окрестности каждой критической точки подходящей заменой координат можно привести к виду $\pm(x^2+y^2)$ или xy.

Следствие (формула Эйлера). *Для гладкой функции на сфере*

$$\textit{(число максимумов)} + \textit{(число минимумов)} - \textit{(число седел)} = 2.$$

Теперь рассмотрим гладкие функции на торе. Для функции высоты пространство компонент изображено на рис. 10. Пристраивая к этому циклу деревья, получим пространства компонент для более сложных функций.

Теорема. *Для любой гладкой функции общего положения на торе пространство компонент состоит из одного цикла с присоединенными деревьями.*

При попытке доказать эти теоремы наибольшую неприятность доставляют «кратеры» (рис. 11). На рисунке изображены вид графика функции, линии уровня (черточка показывает направление минус-градиента,

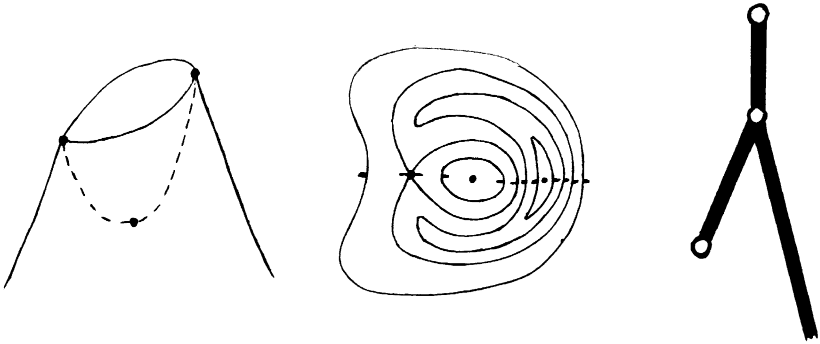


Рис. 11. *Линии уровня и пространство компонент вблизи кратера.*

т. е. быстрейшего убывания функции; в картографии ее называют «бергштрих»), а также соответствующая часть пространства компонент.

Становится ясным ход обобщений. Для «кренделя» (рис. 12) пространство компонент содержит два цикла, …, для поверхности рода n («сфера с n ручками» или «крендель с n дырками») — n циклов.

До сих пор мы занимались случаем периодических функций ($a = b = 0$). Если же функция на плоскости по-настоящему псевдопериодическая (один из коэффициентов линейной части не 0), то она уже не определена на торе. Однако, на торе появляется перенесенная с плоскости система линий уровня функции $g(x,y) = ax + by + f(x,y)$, где f — периодическая. Если $f = 0$, то уравнение $g = \mathrm{const}$ задает на плоскости систему прямых, если $f \neq 0$, но достаточно мала (малое возмущение), то эта система линий уровня не имеет особенностей.

Задача. *Пусть* $|f'_x| < a$, $|f'_y| < b$. *Докажите, что в этом случае система линий* $g = \mathrm{const}$ *на торе выпрямляема, т. е. существует гладкая*

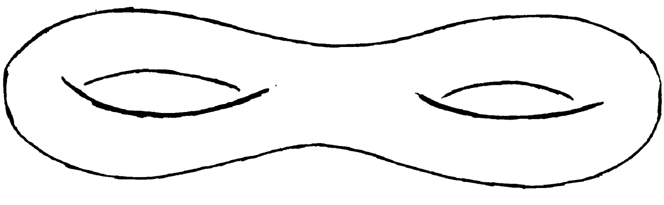


Рис. 12. *Крендель (сфера с двумя ручками).*

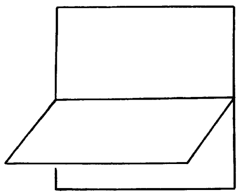


Рис. 13. *Невозмущенная береговая линия.*

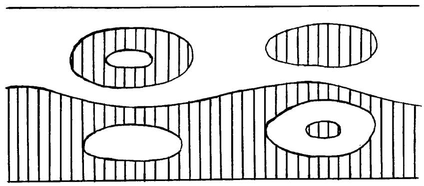


Рис. 14. *Возмущенная псевдопериодическая береговая линия.*

периодическая замена переменных, переводящая систему линий $g = \mathrm{const}$ *на торе в систему параллельных прямых.*

Решение этой задачи имеется, например, в [2].

Гораздо интересней случай большого возмущения. Рассмотрим множество $M_c = \{(x, y) : ax + by + f(x, y) < c\}$. Его легко себе представить наглядно. Горную страну — график функции g — затопим водой до уровня c. Получим воду, сушу и береговую линию.

Например, если $f = 0$, то береговой линией будет прямая (рис. 13), в общем случае картина может быть сложной (рис. 14).

Например, на суше могут быть озера, на озерах — острова, в море — острова, на островах — озера и т. п. Если c — неособый уровень, то имеется конечной ширины полоса возмущения, вне которой с одной стороны — только суша, а с другой — только вода. Интересно изучить геометрию этой полосы. Заранее не ясно, может ли в море быть приходящая из бесконечности «коса», или на суше — приходящий из бесконечности «канал»? Формально говоря, существуют ли отличные от океана неограниченные компоненты множества M_c?

Задача. *Пусть* $a/b \notin \mathbb{Q}$, *функция* f *— достаточно гладкая. Тогда неограниченная компонента множества* M_c *ровно одна.*

Задача. *Верно ли это для непрерывной* f*?*

(Ответ: неверно.)

Упражнение 3. *Пусть* $a/b \in \mathbb{Q}$. *Постройте пример, когда неограниченных компонент больше одной.*

В случае гладких функций n переменных неограниченных компонент тоже не более одной (см. [3]).

Вот еще несколько задач псевдопериодической топологии плоских кривых.

Задача. *Пусть f — гладкая периодическая функция трех переменных с периодом 1 по каждому из них. Рассмотрим неособую кривую*

$$f(x, y, ax + by) = 0$$

на плоскости с координатами (x, y) ($a, b, 1$ несоизмеримы, так что $pa + qb + r \neq 0$ при целых $p, q, r \neq 0$). Верно ли, что каждая ее компонента связности лежит в полосе, ограниченной двумя параллельными прямыми (гипотеза С. П. Новикова) [4][1)]?

Задача. *Рассмотрим пять векторов v_i, ведущих из центра в вершины правильного пятиугольника на плоскости. Составим функцию на плоскости*

$$H(z) = \sum_{i=1}^{5} \cos\langle v_i, z\rangle$$

(где скобки означают скалярное произведение) — сумму пяти плоских волн с нормалями v_i. Верно ли, что все связные компоненты ее линий уровня ограничены? Существует ли сколь угодно большая компонента, охватывающая нуль?

Рассмотрим теперь псевдопериодические кривые в трехмерном пространстве, а именно, линии уровня пары псевдопериодических функций

$$\begin{cases} ax + by + cz + f(x, y, z), \\ px + qy + rz + g(x, y, z), \end{cases}$$

где f, g — периодические функции периода 1 по каждой переменной. При отсутствии возмущений ($f = g = 0$) эти линии — прямые, как линии пересечения плоскостей уровня каждой линейной функции по отдельности. Если коэффициенты линейных функций несоизмеримы, то проекция каждой такой прямой на трехмерный тор всюду плотна на нем.

Если возмущения присутствуют, то все компоненты кривой уровня лежат в пределах конечного расстояния от указанной прямой, так как для каждой отдельной функции ее график отклоняется на ограниченное расстояние от невозмущенной плоскости.

Проблема. *Сколько неограниченных компонент может иметь эта кривая?*

[1)] В 1993 г. И.Дынников доказал эту гипотезу для почти всех a, b, однако для некоторых исключительных a/b она неверна (М. Дынников, Г. Царев).

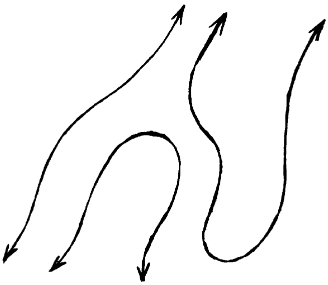


Рис. 15. *Неограниченные линии уровня пары псевдопериодических функций.*

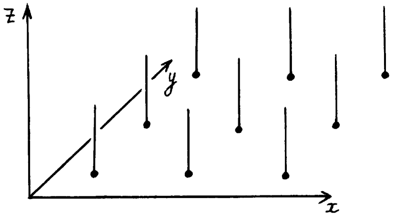


Рис. 16. *Невозмущенное отображение пространства на плоскость и его слои.*

Гипотеза. Одну.

Доказано [7], что неограниченных компонент нечетное число[2)].

Если функции f, g аналитические (т. е. разлагаются в окрестности каждой точки в сходящийся ряд Тейлора), то любая неограниченная компонента либо замкнута, либо уходит обоими концами в бесконечность (рис. 15). Для бесконечно гладких f, g это не всегда так (почему?).

Пример. Если $f = 0$, то можно свести вопрос к случаю меньшей размерности. Из условия $ax + by + cz = \text{const}$ выразим z: $z = \alpha x + \beta y$ и подставим во вторую функцию, получим

$$\tilde{p}x + \tilde{q}y + g(x, y, \alpha x + \beta y) = 0,$$

где функция g периодическая по трем переменным. Это уравнение можно записать в виде

$$\tilde{p}x + \tilde{q}y + \tilde{g}(x, y) = 0.$$

Правда, функция $\tilde{g}$ уже не будет периодической, но она будет *почти периодической.*

Задача. *Сколько неограниченных компонент может иметь кривая на плоскости (x, y), заданная этим уравнением? Может ли их число быть больше 1?*

[2)] Д. Пановым (см. [8]) показано, что количество компонент может быть сколь угодно велико.

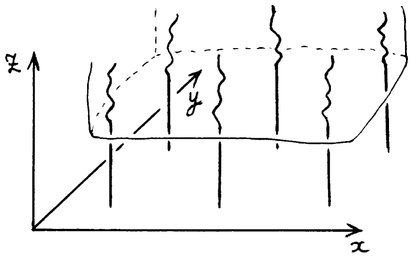


Рис. 17. *Слои возмущенного отображения.*

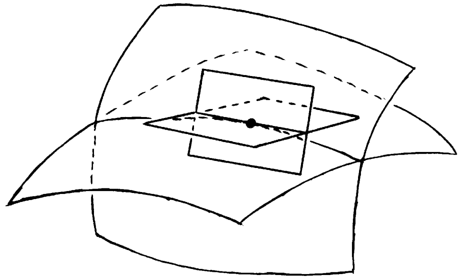


Рис. 18. *Построение касательной к слою.*

Этот вопрос открыт[3] даже для случая, когда g — тригонометрический многочлен (есть гипотеза, что число компонент не более 1). Но контрпримеры неизвестны и в случае, когда g — периодическая непрерывная функция трех переменных.

Рассмотрим теперь отображение проектирования:

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \ (x, y, z) \mapsto (x, y).$$

$\mathbb{R}^3$ расслаивается на вертикальные прямые — прообразы точек; можно считать, что прямые параметризованы точками плоскости $\mathbb{R}^2$ (рис. 16). Теперь локально возмутим наше проектирование, т. е. рассмотрим отображение

$$\begin{cases} u = x + f(x, y, z), \\ v = y + g(x, y, z), \end{cases}$$

где f, g — гладкие финитные (т. е. отличные от 0 лишь в ограниченной области) функции. Прообразами точек теперь станут кривые, совпадающие с исходными прямыми вне ограниченной области (рис. 17).

Эти кривые могут иметь особенности. Действительно, каждая кривая получается как пересечение поверхностей уровня каждой функции по отдельности. Линия их пересечения гладкая в тех точках, где имеется касательная. А касательная наверняка определена там, где касательные плоскости к поверхностям различны: прямая пересечения этих плоскостей и есть касательная к нашей кривой (рис. 18). Там же, где касательные плоскости совпадают, могут появиться особенности кривой.

[3] После того, как эта лекция была прочитана, этот вопрос был решен И. Дынниковым: компонента всегда одна. Однако общая проблема, в которой и f, и g не равны 0, остается открытой.

Пример. Нулевая линия уровня поверхности $z = xy$ имеет особенность (рис. 19).

Алгебраически условие несовпадения касательных плоскостей есть условие, что ранг некоторой матрицы из частных производных (сообразите, какой) равен двум.

Теорема. *Для пары функций f, g общего положения множество особых точек слоев (где касательные плоскости поверхностей $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ совпадают) является гладкой кривой.*

Далее, особые точки могут быть *эллиптическими*, как в случае модельного отображения $u = z,\ v = z + x^2 + y^2$, и *гиперболическими*, как в случае $u = z,\ v = z + x^2 - y^2$. Вид слоев в окрестности эллиптической и гиперболической точки показан на рис. 20, 21 соответственно.

Вдоль линии особых точек их характер может меняться (рис. 22).

Пример. Для отображения $u = z,\ v = z + x - zx + y$ с течением «времени» происходят перестройки (рис. 23).

В описанной ситуации возникают интересные проблемы:

- ▷ Найти пространство компонент (в невозмущенном случае это плоскость, в общем — некоторый двумерный комплекс; надо его описать).
- ▷ Как влияет топология многообразия-прообраза ($\mathbb{R}^3$ в нашем случае) на этот комплекс?

Пример. Для отображения $u = z,\ v = z + x^3 + (z^2 - 1)x + y^2$ комплекс компонент имеет вид плоскости с приклеенным по диаметру полукругом (рис. 24). Точки полукруга соответствуют замкнутым компонентам, ограничивающим его дуги — точечные компоненты (рис. 25).

Де Рам и Бюрле сформулировали гипотезу Пуанкаре (односвязное замкнутое трехмерное многообразие диффеоморфно сфере) в таких терминах: *всякое замкнутое односвязное трехмерное многообразие имеет отображение на плоскость, у которого все особые точки эллиптические* [5].

Задача. *Верно ли, что каждая замкнутая ограниченная компонента прообраза точки при отображении общего положения $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, совпадающем с линейным расслоением $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ вне шара, зацеплена с кривой особых точек? Имеет ненулевой коэффициент зацепления с ней?*

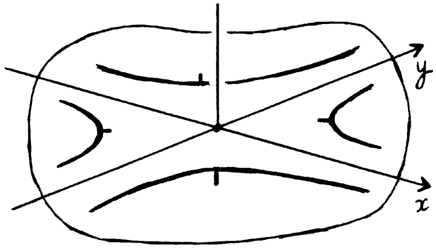


Рис. 19. *Негладкое пересечение параболоида и плоскости.*

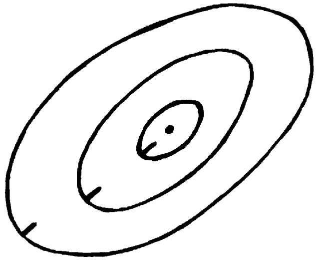


Рис. 20. *Слои вблизи эллиптической особой точки.*

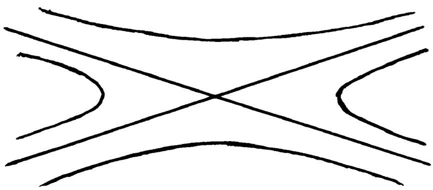


Рис. 21. *Слои вблизи гиперболической особой точки.*

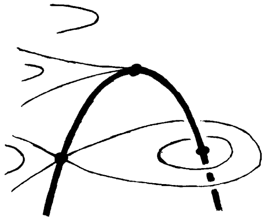


Рис. 22. *Перестройка на границе гиперболических и эллиптических особых точек.*

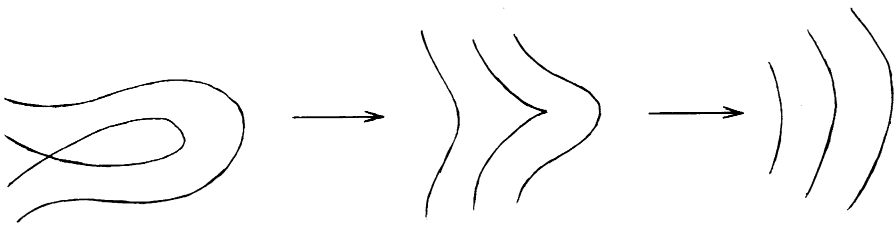


Рис. 23. *Перестройка семейства линий уровня гладкой функции на плоскости.*

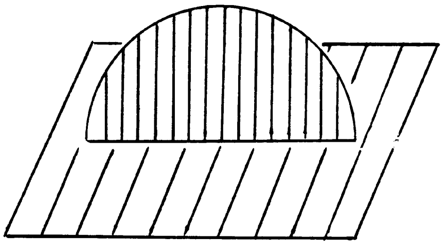


Рис. 24. *Комплекс компонент.*

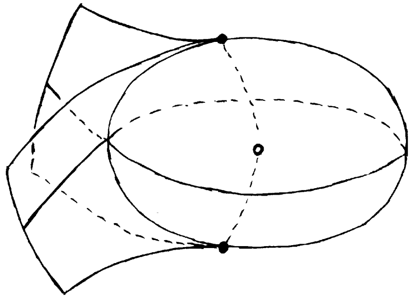


Рис. 25. *Ячейка замкнутых слоев и особые слои.*

Задача. *Существует ли отображение $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, совпадающее с линейным расслоением $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ вне шара, имеющее гиперболические и не имеющее эллиптических особых точек?*

(Ответ: существует.)

Как выглядит соответствующий комплекс? (Указание: множество критических значений может иметь вид восьмерки.)

Задача. *Рассмотрим семейство псевдопериодических кривых – слоев (прообразов точек) при отображении*

$$(x, y, z) \mapsto \begin{cases} u = ax + by + cz + g(x, y, z), \\ v = dx + ey + fz + h(x, y, z), \end{cases}$$

где a, b, c, d, e, f — числа общего положения, g и h — 1-периодические по трем переменным гладкие функции. Верно ли, что каждый неособый слой ($u = u_0$, $v = v_0$) имеет ровно одну неограниченную компоненту? (Конечно, достаточно рассмотреть случай, когда $b = 1$, $c = 0$, $f = 1$, $e = 0$.)

Задача. *Предположим, что отображение предыдущей задачи не имеет особых точек. Докажите, что отображение выпрямляется периодическим диффеоморфизмом трехмерного пространства (приводится к виду, где g и h тождественно равны нулю).*

Список литературы

[1] *Кронрод А. Г.* О функциях двух переменных // УМН. Т. 5, вып. 1. 1950. С. 24–134.

[2] *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // ДАН СССР. Т. 93, №5. 1953. С. 763–766.

[3] *Арнольд В. И.* Топологические и эргодические свойства замкнутых 1-форм с несоизмеримыми периодами // Функц. анализ и его прилож. Т. 25, вып. 2. 1991. С. 1–12.

[4] Topologocal Methods in Modern Mathematics // J. Milnor's Jubiley Volume. Houston: Publish or Perish. 1993.

[5] *Burlet O., De Rham G.* Sur certains applications génériques d'une variété close à 3 dimensions dans le plan // Enseignement Mathematique. **XX**. 1974. P. 275–292.

[6] *Арнольд В. И.* Полиинтегрируемые потоки // Алгебра и анализ. Т. 4, вып. 6. 1992. С. 54–62.

[7] *Дынников И. А.* О пересечениях поверхностей уровня псевдопериодических функций // УМН. Т. 49, вып. 1. 1994. С. 213–214.

[8] *Панов Д. А.* Многокомпонентные псевдопериодические отображения // Функц. анализ и его прилож. Т. 30, вып. 1. 1996. С. 30–38.

Лекции для школьников

Олимпиады и геометрия

В. М. Тихомиров

Лекция, прочитанная участникам LVI Московской городской олимпиады 27 марта 1993 года.

1. Несколько слов об истории геометрии и олимпиад

Как вы думаете, что возникло раньше — математика или олимпиады?

Казалось бы, математика, ибо арифметические задачи и геометрические формулы можно встретить, например, в египетских папирусах, написанных задолго до того, как родилась великая античная цивилизация. Но в этих старинных текстах не было самой существенной компоненты, которая, как принято считать, отличает математику от других наук — не было *доказательств*. А без доказательств — разве это математика?

А когда появились первые доказательства? Это было тоже так давно, что истина расплывается в тумане времен. И все же легенда упорно приписывает честь быть первым «доказательным» математиком знаменитому мудрецу Фалесу. При этом с поразительной точностью называют даты его жизни: 625–527 до нашей эры (тогда как время жизни, скажем, Пифагора или Евклида датируется очень приблизительно).

А первые Олимпиады — празднества в честь Зевса, когда прекрасные юноши состязались в спорте и искусствах, возникли чуть раньше рождения Фалеса: первая Олимпиада, как считается, состоялась в 776 году до нашей эры (и снова — точная дата!).

Теперь уместно задаться вопросом о том, когда же возникли первые *математические* Олимпиады. Первый математический конкурс для выпускников лицеев был проведен в Румынии в 1889 году, а собственно олимпийское математическое движение родилось в Будапеште чуть позже, в 1894 году, когда Венгерское физико–математическое общество приняло решение об организации состязаний для выпускников гимназий, и эти состязания стали традицией. На этих состязаниях отличились многие юноши, впоследствии ставшие замечательными математиками нашего века.

В СССР первая математическая олимпиада состоялась в Ленинграде в 1934 году (так что на будущий[1)] год можно будет отпраздновать шестидесятилетие нашего «олимпийского движения»), а первая московская городская олимпиада была организована в 1935 году. Нынешняя олимпиада имела номер LVI (в 1942 и 43 годах олимпиады не проводились, было не до них)[2)].

С 1961 года начала проводиться Всесоюзная олимпиада. (Международные математические олимпиады проходят с 1959 года.)

Такова история олимпиад. Осталось сказать еще несколько слов об истории геометрии, ибо математика (так уж вышло) началась именно с геометрии. В начальный период геометрия выдвинула многих своих творцов, но больше всего склоняют обычно три (уже названных) имени: Фалес, Пифагор и Евклид.

Было сказано, что Фалесу приписывают первые доказательства. Он доказал, например, что вертикальные углы равны, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны, что угол, опирающийся на диаметр, — прямой и еще — известную, связываемую с его именем почти во всех учебниках, — теорему о подобии.

Считается, что Пифагор был первым создателем научной школы. В этой школе была открыта теорема, известная ныне всем как теорема Пифагора.

Евклид написал первый учебник по геометрии, где он развил то, что ныне называется *аксиоматическим методом*, когда все исходит с изначальных, неопределяемых понятий, затем их свойства описываются аксиомами, а остальное строго выводится чисто логическим путем.

А потом шаг за шагом математика достигла тех вершин, которые составляют украшение всей общечеловеческой культуры. Но основания,

---

[1)] Напомним, что лекция была прочитана в 1993 году после окончания олимпиады.

[2)] А олимпиада нынешнего, 1997 года имела номер LX — шестьдесят!

заложенные в творениях Фалеса, Пифагора, Евклида и других родоначальников нашей науки, сохранили свое значение и в наши дни. В частности, их теоремы (если их знать и уметь ими пользоваться) помогли бы многим решить геометрические задачи LVI олимпиады. Но в наше время геометрическое образование переживает трудные времена. Например, на этой олимпиаде было получено очень мало решений геометрических задач. Но прежде, чем касаться олимпиадных геометрических задач этого года, сделаем ликбез — обзор некоторых начальных и наиболее фундаментальных геометрических теорем древности и следствий из них.

2. Теоремы Фалеса, Пифагора и Евклида

Давайте докажем все эти теоремы: они ведь очень просты (но и красивы!).

Теорема 1. *(Фалес — см. «Начала», кн.1, предложение 5[3]) В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.*

Докажем эту теорему по Льюису Кэроллу, замечательному выдумщику и сказочнику, имя которого известно каждому из-за его «Алисы в стране чудес». (Но мало кому известно, что он был математиком.)

Доказательство Кэролла проводится с помощью ... ножниц. Пусть дан равнобедренный треугольник ABC, причем $AB = BC$.

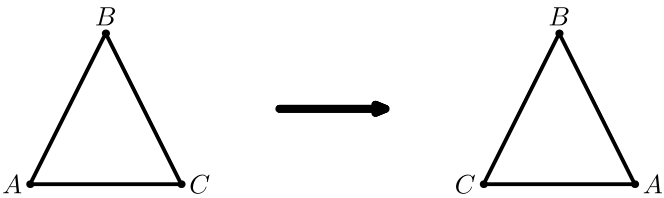


Рис. 1.

Допустим, что этот треугольник нарисован на листе бумаги. Вырежем его. Перевернем и попробуем заткнуть образовавшуюся дыру. Это нам удастся, не правда ли? Сторона BC пойдет по «бывшей» стороне AB, и точка C совпадет с «бывшей» точкой A, аналогично точка A на вырезанном треугольнике совпадет с «бывшей» точкой C. Таким образом,

[3]Переводчик Евклидовых «Начал» пишет (см. сноску к предложению 5): «Свойство равнобедренного треугольника, доказываемое в предложении 5, по свидетельству Прокла, обнаружил еще Фалес.» Здесь и далее цитируется книга: «Начала Евклида», книги I-IV. Перевод с комментариями Д. Д. Мордухай-Болтовского. М.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948.

все вершины бывшего и перевернутого треугольников совпадут, т. е. перевернутый треугольник заткнет-таки образовавшуюся дыру, а значит, угол C займет место угла A. Таким образом, угол C равен углу A. Теорема доказана.

А теперь докажем еще одну фундаментальную теорему. Считается, что она была известна Пифагору. (Но это, разумеется, не «та», знаменитая теорема).

Теорема 2. *(Пифагор — см.«Начала», кн.1, предложение 32) Сумма углов треугольника равна двум прямым.*

И снова докажем этот результат с помощью ножниц, впрочем, нам еще потребуется циркуль.

Доказательство. Пусть нам дан треугольник ABC. Продолжим отрезок AB за вершину B, отрезок BC за вершину C и отрезок CA за вершину A.

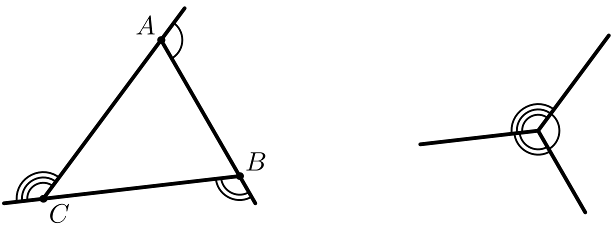


Рис. 2.

Взяв какой-то раствор циркуля, нарисуем три сектора около вершин A, B и C, как это показано на нашем рисунке 2. Вырежем эти секторы. И начнем перемещать сектор с центром в B, перенося его вдоль стороны AB так, чтобы точка B попала в точку A. Затем то же самое проделаем с сектором с центром в C, перенося его вдоль CA так, чтобы точка C попала бы также в точку A. В силу знаменитой евклидовой аксиомы о параллельных через точку A можно провести только одну прямую, параллельную BC, значит, все три сектора будут примыкать друг к другу, образуя целый круг. Итак, три внешних угла к углам A, B и C в сумме дают $4d$ (здесь d — величина прямого угла). А если присоединить к ним искомую сумму самих углов A, B и C, то получится сумма трех развернутых углов, т. е. $6d$. Значит, $\angle A + \angle B + \angle C = 2d$, что и требовалось.

Следствие (теорема о внешнем угле). *Величина внешнего угла равна сумме величин двух углов треугольника, не смежных с ним.*

Внешний угол к углу C в сумме с самим углом C равен $2d$ и угол C в сумме с углами A и B равен $2d$, т. е. $\angle A + \angle B =$ величине внешнего угла к C.

И последняя теорема — она имеется в «Началах» Евклида. Мы также докажем ее с помощью ножниц.

Теорема 3. *(Евклид — см.«Начала», кн.1, предложение 4). Если две стороны одного треугольника имеют одинаковые длины с двумя сторонами другого треугольника, и величины углов, стягиваемых этими сторонами, также одинаковы, то треугольники равны.*

Это и есть признак равенства треугольника по двум сторонам и углу между ними.

Доказательство здесь напрашивается. Надо вырезать один треугольник A_1, B_1, C_1 и далее совместить A_1 с A, пустить A_1B_1 по AB и тогда (в силу равенства углов) A_1C_1 пойдет по AC. В итоге все вершины совместятся, что и означает равенство треугольников. Теорема доказана.

Все три приведенных нами теоремы доказаны не совсем по учебнику, да и сам Евклид рассуждал не совсем так (хотя похоже). Обычно все это выводят из аксиом, но для такого аккуратного вывода нужна немалая предварительная работа, зачастую очень неинтересная и расслабляющая. Мы же апеллировали фактически непосредственно к здравому смыслу. И получилось довольно убедительно, не правда ли? Но вот что интересно: мы как бы мимоходом забрались на такую высоту, что теперь можем двигаться очень далеко вперед уже без «ножниц», используя лишь эти теоремы и абсолютно точные законы логики. И в итоге мы решим не только все наши олимпийские задачи, но фактически готовы решить почти любую геометрическую задачу вообще, надо лишь освоиться еще с понятием подобия. Но сначала, прежде чем переходить к «олимпийской» геометрии, выведем (теперь уже абсолютно строго, ни один любитель строгости не скажет нам ни слова упрека) несколько следствий из трех приведенных нами теорем.

Следствие 1. *(Фалес — см. «Начала», кн.3, предложение 31). Угол, опирающийся на диаметр, — прямой.*

Доказательство этого следствия опирается на два только что доказанных факта: теорему 1 и следствие из теоремы 2.

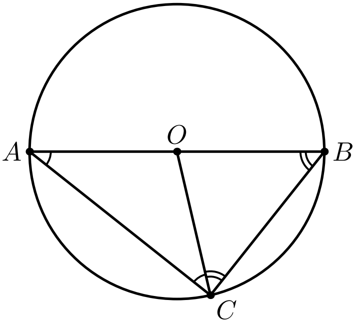


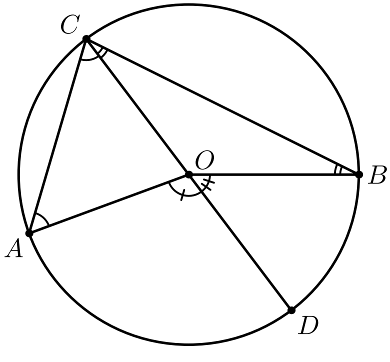
Рис. 3.

Пусть угол C опирается на диаметр AB, O — центр окружности. Соединим O с C.

Тогда $\angle C = \angle ACO + \angle OCB$. В силу теоремы 1 $\angle ACO = \angle CAO$, а $\angle OCB = \angle CBO$. При этом в силу теоремы 2 $\angle ACO + \angle CAO = \angle COB$, а $\angle OCB + \angle CBO = \angle COA$. Но углы COB и COA — смежные, их сумма равна $2d$. Значит, $\angle C$ есть половина этого угла, т. е. d.

Следствие 2 (теорема о вписанном угле). *Пусть угол C опирается на дугу AB. Тогда его величина вдвое меньше величины центрального угла AOB.*

Эта теорема доказывается почти также, как следствие 1, и мы лишь ограничимся чертежом (рис. 4).



$\angle AOD = 2\angle ACD$,
$\angle BOD = 2\angle DCB$, *следовательно*
$\angle ACB = 1/2\angle AOB$.

Рис. 4.

Продумайте теперь такой вопрос. Пусть даны два треугольника ABC и $A'BC$, у которых $\angle A = \angle A'$. Тогда четыре точки A, A', B и C лежат на одной окружности. Это утверждение естественно назвать *обратной теоремой о вписанном угле.*

Через короткое время мы продолжим наш экскурс в геометрию, а пока убедимся в том, что и полученных нами знаний достаточно, чтобы решить геометрические задачи LVI олимпиады за 8–10 классы.

3. Геометрические решения олимпиадных задач

В 8 классе была предложена следующая задача (автор ее — И. Ф. Акулич):

Окружность с центром D проходит через точки A, B и центр O вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся его стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

Решение. Обозначим $\angle D = \angle ADB$. Имеем (рис. 5): по теореме о вписанном угле

$$\angle AOB = 1/2\angle D, \tag{i}$$

AO — биссектриса, значит,

$$\angle BAO = 1/2\angle A; \tag{ii}$$

по теореме о сумме углов треугольника и из (i)–(ii)

$$\angle FBO = 1/2(\angle D + \angle A); \tag{iii}$$

BO биссектриса, значит,

$$\angle FBO = 1/2\angle FBC; \tag{iv}$$

и, наконец (теорема о внешнем угле)

$$\angle FBC = \angle A + \angle C, \tag{v}$$

значит (из (iii)–(v)), $\angle D = \angle C$, т. е. по обратной теореме о вписанном угле точки A, B, C и D лежат на одной окружности. Задача решена.

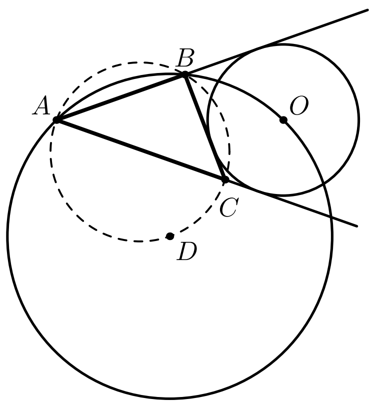


Рис. 5.

А вот задача 9 класса (автор И. Ф. Шарыгин):

Дан выпуклый четырехугольник $ABMC$, в котором $AB = BC$, $\angle BAM = 30°$, $\angle ACM = 150°$. Докажите, что AM — биссектриса угла BMC.

Решение. Симметрично отразим точку B относительно AM.

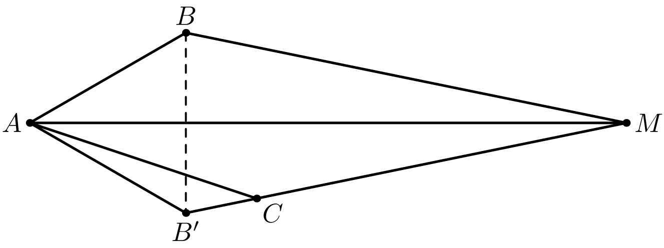


Рис. 6.

По признаку равенства треугольников $|AB| = |AB'|$ и $\angle BAB' = 60°$. Значит, треугольник ABB' равносторонний и A, B', C лежат на одной окружности с центром в точке B. Значит, по теореме о вписанном угле $\angle ACB' = 30°$, т. е. B', C и M лежат на одной прямой, симметричной MB относительно MA. Значит, MA — биссектриса угла BMC. Задача решена.

И, наконец, задача 10 класса, которую также придумал И. Ф. Шарыгин.

На стороне AB треугольника ABC внешним образом построен квадрат с центром O. Точки M и N — середины сторон AC и BC соответственно, а длины этих сторон равны соответственно b и a. Найдите максимум суммы $OM + ON$, когда угол ACB меняется.

Решение. Здесь нам придется воспользоваться единственным недоказанным ранее результатом (но очень простым), а именно, *теоремой о средней линии.* По этой теореме $OM = 1/2CB'$, а $ON = 1/2CA'$ (см. на следующей странице рис. 7 а)).

Построим на сторонах CB и AC внешние квадраты $CBB''C''$ и $ACC'''A'''$. Соединим A с B'', см. рис. 7 б). По признаку равенства треугольников ($AB = BB', CB = BB'', \angle ABB'' = \angle CBB'$) треугольник $B'CB$ равен треугольнику ABB''. Значит, длина CB' максимальная, когда максимальна длина $B''A$, а она максимальна, разумеется, тогда, когда $\angle ACB$ равен 135°, см. рис. 7 в). И про CA' мы докажем точно такой же результат, рассматривая треугольники ABA''' и ACA'. Итак, максимум достигается при $\angle ACB = 135°$ и оказывается равным $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

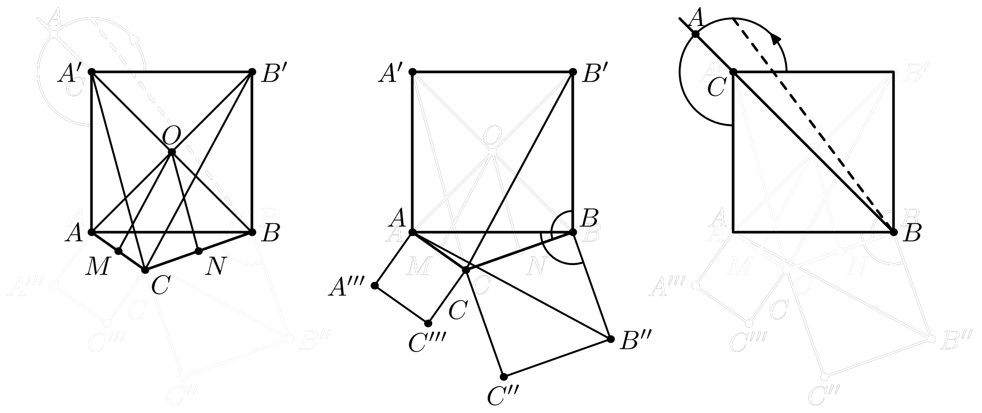


Рис.7 а) ***7 б)*** ***7 в)***

4. Продолжение экскурса-ликбеза и аналитические решения задач 9 и 10 классов

Мы решили все задачи *геометрически*. Решения были очень короткими (проанализируйте: каждое состояло не более, чем из семи шагов). Но на самом деле эти решения очень непросто найти. Подтверждением тому служит опыт LVI олимпиады. Задачу 8 класса не решил ни один человек. Задачу 9 класса решил только один юноша (но не так, как было показано, а аналитически) и еще один юноша «почти» решил ее (об этом мы расскажем чуть позже). Задачу 10 класса решило меньше 10 школьников. И среди решений лишь одно было геометрическим.

Я хочу здесь обсудить один важный тезис. *Все геометрические задачи могут быть решены чисто алгебраически, без чертежей и дополнительных построений, так сказать, стандартно. При этом примерно в 2/3 случаях аналитические решения существенно проще геометрических.* Этот тезис я хочу проиллюстрировать снова на примере двух третей наших задач, точнее — на задачах 9 и 10 классов. Но сначала мы должны еще кое-чему научиться.

Начнем мы, пожалуй, с самой знаменитой теоремы геометрии: теоремы Пифагора.

Теорема 4. *Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.*

И снова докажем эту теорему с помощью ножниц.

Пусть катеты нашего треугольника равны a и b. Построим квадрат $ABCD$ со стороной $a+b$ и нарисуем в нем четыре треугольника, как это сделано на рис. 8 а) на следующей странице.

По признаку равенства треугольников треугольники $A'BB'$, $B'AC'$, $C'DD'$, $D'CA'$ равны нашему треугольнику и, значит, между собою. Из теоремы о сумме углов треугольника, как легко видеть, вытекает, что все углы четырехугольника $A'B'C'D'$ равны d. Значит, это квадрат, его площадь равна c^2, где c — длина гипотенузы. Вырежем теперь наши четыре треугольника и приложим к квадратам со сторонами a и b, как показано на рис. 8 б). И сразу получаем тогда, что $a^2 + b^2 = c^2$. Теорема доказана.

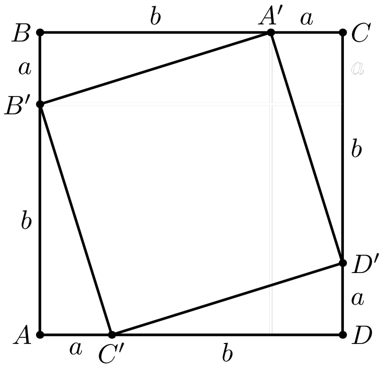
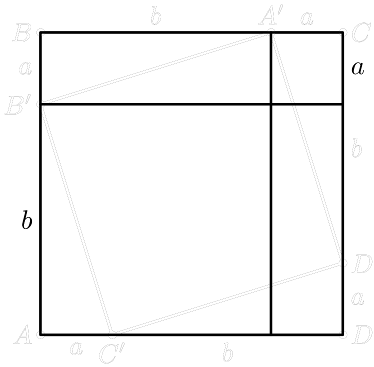


Рис. 8 а)



8 б)

Напомним тому, кто об этом слышал, и пусть запомнит тот, кто слышит об этом впервые, что это отношение противолежащего углу φ катета к гипотенузе называется синусом угла φ ($\sin\varphi$), а прилежащего — косинусом угла φ ($\cos\varphi$); по определению, $\operatorname{tg}\varphi = \sin\varphi/\cos\varphi$.

Теорема 5. *Пусть дан треугольник ABC со сторонами a, b и c (см. рис. 9 на следующей странице). Тогда имеют место следующие соотношения:*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \qquad \textit{(теорема синусов)},$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi \qquad \textit{(теорема косинусов)}.$$

Доказательство. Опишем окружность вокруг треугольника ABC; пусть B' — точка, симметричная B относительно центра, см. рис. 9. Тогда по теореме о вписанном угле и из определения синуса получаем, что $c/\sin C = 2R$, т. е. $a/\sin A = b/\sin B = C/\sin C = 2R$, что и доказывает теорему синусов.

С другой стороны, опустим высоту BD из точки B на AC (рис. 10).

Из теоремы Пифагора, определения косинуса и синуса и соотношения $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ (следующего сразу опять-таки из теоремы Пифагора), получаем теорему косинусов:

$$c^2 = \\ = (b - a\cos\varphi)^2 + (a\sin\varphi)^2 = a^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + b^2 - 2ab\cos\varphi = \\ = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi,$$

что и требовалось.

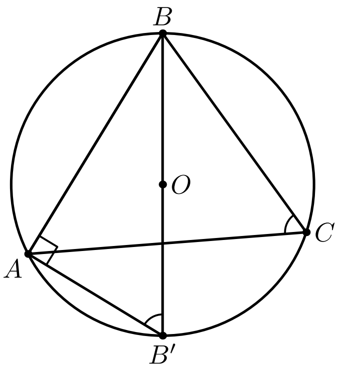


Рис. 9.

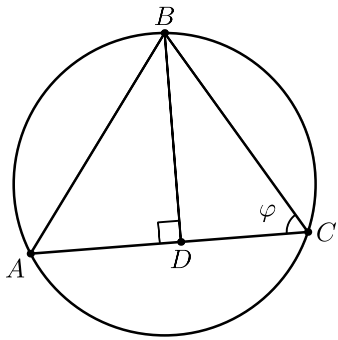


Рис. 10.

А теперь дадим *аналитические* решения задач 9 и 10 классов.

Аналитическое решение задачи 9 класса. См. рисунок 11 на следующей странице.

Из теоремы синусов для треугольника ABM получаем:

$$\frac{a}{\sin\varphi} = \frac{b}{\sin 30^\circ} = 2b,$$

а из той же теоремы для треугольника BMC получаем

$$\frac{b}{\sin(90^\circ + \psi)} = \frac{a}{\sin(\varphi + \psi)}.$$

Из этих двух равенств следует, что

$$2\sin\varphi\cos\psi = \sin(\varphi + \psi) \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\psi \Rightarrow \varphi = \psi.$$

(Использовались простые соотношения:

$$\sin 30^\circ = 1/2, \quad \sin(90^\circ + \psi) = \cos\psi, \quad \angle BCM = 90^\circ + \psi$$

и важное соотношение, которое, впрочем, нетрудно доказать:

$$\sin(\varphi+\psi)=\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi.)$$

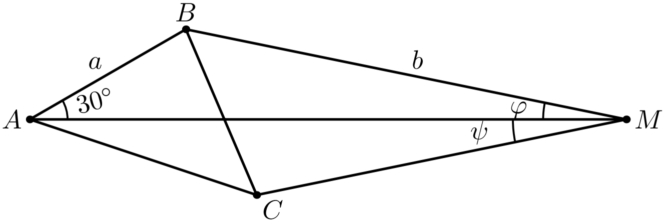


Рис. 11.

Аналитическое решение задачи 10 класса. См. рис. 12.

Имеем (по теореме косинусов):

$$|CB'|^2=d^2=a^2+c^2-2ac\cos(\chi+90^\circ)=$$
$$=a^2+c^2+2ac\sin\chi, \qquad \text{(i)}$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\varphi. \qquad \text{(ii)}$$

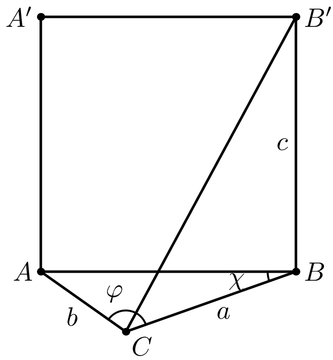


Рис. 12.

Но по теореме синусов

$$\frac{b}{\sin\chi}=\frac{c}{\sin\varphi}\Rightarrow c\sin\chi=b\sin\varphi. \qquad \text{(iii)}$$

Значит (из (i)–(iii)),

$$d^2=2a^2+b^2+2ab(\sin\varphi-\cos\varphi).$$

Аналогично, $d'^2=2b^2+a^2+2ab(\sin\varphi-\cos\varphi)$, где $d'=CA'$.

Оба выражения достигают максимума в одной точке: $\hat\varphi=135^\circ$, ибо

$$\sin\varphi-\cos\varphi=\sqrt{2}\cos(135^\circ-\varphi),$$

а последнее выражение максимально при $\varphi=135^\circ$. Тогда максимальное значение

$$\begin{aligned} d_1+d_2 &= ((2b^2+a^2+2\sqrt{2}ab)^{1/2}+(2a^2+b^2+2\sqrt{2}ab))^{1/2}= \\ &= \sqrt{2}b+\sqrt{2}a+b+a=(\sqrt{2}+1)(a+b)\Rightarrow \\ |OM|+|ON| &= \frac{\sqrt{2}+1}{2}(a+b). \end{aligned}$$

Задача решена.

Не правда ли, аналитические и геометрические решения сильно отличаются (хотя оба пути ведут к цели)?

5. Некоторые заключительные замечания и комментарии

Обсуждаемыми тремя задачами не исчерпывается геометрическая тема на LVI олимпиаде. Там была шарыгинская («утешительная») задача в 9 классе. Она прошла хорошо, было достаточно много решений. И была очень понравившаяся всем участвующим в отборе задач опять-таки шарыгинская («особо трудная») задача в 11 классе:

Муха летает внутри правильного тетраэдра с ребром a. Какое наименьшее расстояние она может пролететь, чтобы побывать на каждой грани и вернуться в исходную точку?

Это — очень содержательная и интересная задача.

Задачи с геометрическими компонентами были и помимо названных. Но те задачи, которые мы разбирали, обладают одной особенностью: они являются *стандартными*, такими, которые содержатся в стандартных учебниках, какие решают в школе. По идее любую из них должен уметь решать каждый, кто любит математику. И то, что на олимпиаде решений было совсем немного, свидетельствует: геометрическое образование находится в упадке. А жаль!

Мне хотелось показать своим слушателям, как мало, в сущности, надо знать, чтобы иметь возможность решать геометрические задачи даже той повышенной трудности, которая характерна для задач Московской олимпиады. В течение часа лекции мы прошли путь, который проложили для нас Фалес, Пифагор, Евклид и другие наши далекие предшественники, и добавили к тому еще некоторые сведения, ставшие общеизвестными только в XIV веке, когда была развита тригонометрия. А помимо всего этого (на протяжении одной только лекции!) мы решили все геометрические (стандартные, но трудные) задачи олимпиады, причем две из них — двумя способами. И (не знаю, как моим слушателям) мне представляется, что в решениях — и геометрических, и аналитических — было вскрыто много красивого, запоминающегося. Ничего такого, о чем можно было бы воскликнуть: «Ну, как до этого можно догадаться?», и вместе с тем все эти задачи совершенно нетривиальны, они вызывали большое «сопротивление» даже у тех, кто считался признанным экспертом по элементарной геометрии. В частности, никто из нас, организаторов, не нашел того простейшего аналитического решения задачи 9-го класса, которое мы привели.

Его «почти» нашел один школьник, который кроме этой задачи фактически ничего не сделал, имел сплошные нули и два $\pm$ (по этой задаче и еще по одной). Такие работы обычно не очень внимательно рассматриваются при повторной проверке. Но здесь произошел осо-

> бый случай: старший проверяющий постарался вникнуть в суть дела и обнаружил, что юноша фактически добрался до конца (он получил равенство $2\sin\varphi\cos\chi = \sin(\varphi + \chi)$, а затем ушел куда-то в сторону). А дальше было обсуждение — следует ли отметить эту работу специальной премией за решение отдельной задачи или нет. Многим «профессиональным» олимпийцам это решение казалось «неолимпийским». Но спецпремия все-таки была присуждена. О том, насколько «олимпийское мышление»оторвано от геометрического образования, показывает такой факт: один из победителей-десятиклассников, не решивший геометрическую задачу, воскликнул, когда ему было приведено аналитическое решение: «А разве когда-нибудь на олимпиадах были задачи, где надо было применить теорему косинусов?»

Ко всему прочему мне хотелось донести до слушателей две идеи. Первая (повторюсь) такова: *примерно 2/3 геометрических задач допускают более простое аналитическое решение. Так что стоит помнить о теореме синусов и теореме косинусов.* И вторая: *труднее всего формализуются и допускают аналитическое решение задачи с окружностями.* Но там важнейшую роль при их геометрическом исследовании играет замечательная теорема о вписанном угле, восходящая к родоначальнику нашей науки — ионийскому купцу и одному из семи мудрецов древности — Фалесу. Одна из первых теорем оказывается незаменимой!

А в целом мне хотелось бы выразить надежду, что LVI олимпиада была праздником и для тех, кто участвовал в ней, и для тех, кто ее организовывал. А именно в этом и состоит цель всякой олимпиады, не так ли?

Дополнение

Моя лекция перед школьниками закончилась сетованиями на трудность аналитического решения задач с окружностями. На самом же деле многие из таких задач успешно решаются с помощью комплексных чисел.

В этом дополнении я хочу рассказать о том, как помогают комплексные числа решать геометрические задачи. Комплексные числа сейчас не входят в обязательную школьную программу, поэтому сначала скажем несколько слов о самой комплексной плоскости.

Комплексным числом называют выражение вида $a + bi$, где a и b — вещественные числа, а i — символ, удовлетворяющий соотношению $i^2 = -1$. Числа a и b называют соответственно *вещественной* и *мнимой* частью комплексного числа $z = a + bi$; обозначения: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$.

Перемножают комплексные числа по обычным правилам раскрытия скобок и приведения подобных членов, заменяя каждый раз i^2 на -1, т. е. $(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$. Комплексные числа можно делить (кроме, разумеется, деления на нуль): $(a+bi) : (c+di) = \dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$.

Число $\bar{z} = a - bi$ называют *комплексно сопряженным к* $z = a + bi$.

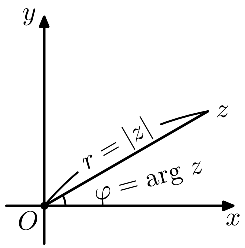


Рис. 13.

Если выбрать декартову систему координат, то устанавливается взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости : $(a, b) \mapsto (a + bi)$. При этом умножение на комплексное число z приобретает такую геометрическую интерпретацию. Пусть r — расстояние от z до нуля, а φ — угол, на который надо повернуть луч, содержащий положительную вещественную полуось $\{z \mid z = a + 0i, a \geqslant 0\}$, чтобы повернутый луч прошел через z (см. рис. 13). Числа r и φ называются соответственно *модулем* и *аргументом* числа z (обозначения: $r = |z|$, $\varphi = \arg z$). Геометрическую интерпретацию умножения комплексных чисел можно теперь сформулировать так: *при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы — складываются.* При этом в анализе доказывается, что числу z можно придать такую форму: $z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Получилась, как говорят, *модель евклидовой плоскости*, где точки — это комплексные числа z, а сама плоскость — это совокупность всех комплексных чисел (обозначаемая $\mathbb{C}$). Уравнение окружности в системе координат Oxy имеет вид:

$$A(x^2+y^2)+2Bx+2Cy+D=0,$$

где A, B, C и D — вещественные числа. Это уравнение в комплексной форме принимает вид ($z = x + iy$):

$$Az\bar{z}+(B-iC)z+(B+iC)\bar{z}+D=0.$$

Уравнение прямой, проходящей через точки ζ и ζ' (эту прямую обозначаем $\zeta\zeta'$) можно задать уравнением

$$\zeta(\bar{\zeta}'-\bar{z})-\zeta'(\bar{\zeta}-\bar{z})+z(\bar{\zeta}-\bar{\zeta}')=0;$$

уравнение окружности с центром в ζ и радиусом r имеет вид $(z-\zeta)(\bar{z}-\bar{\zeta})=r^2$; уравнение прямой, параллельной прямой $\bar{a}z+a\bar{z}=\beta$ и проходящей через точку ζ, имеет вид $\bar{a}z+a\bar{z}=\bar{a}\zeta+a\bar{\zeta}$.

Если вы забыли какую-нибудь теорему или формулу элементарной геометрии, не обязательно искать ее в учебнике — ее обычно легко вывести, используя комплексные числа (надо лишь воспользоваться основными формулами тригонометрии и формулой Эйлера: $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$). Вот примеры двух важных формул евклидовой геометрии, которые мы выведем таким способом (ранее они были выведены геометрически).

Теорема косинусов. Эта теорема, как мы помним, выражает длину стороны треугольника через длины двух других сторон и угол между ними.

Для вывода соответствующей формулы поместим треугольник ABC со сторонами a, b и углом φ между ними так, чтобы $C=0$, $A=be^{i\varphi}$, а $B=a$. Тогда

$$|AB|^2 = c^2=|a-be^{i\varphi}|^2=(a-be^{i\varphi})(a-be^{-i\varphi})=$$
$$a^2+b^2-2ab\cos\varphi=|AC|^2+|BC|^2-2|AC||BC|\cos\varphi.$$

Получили теорему косинусов. В частности, если $\varphi=\pi/2$, получаем *теорему Пифагора*: $c^2=a^2+b^2$.

Теорема синусов. Она дает возможность вычислить две стороны треугольника, зная третью сторону и два угла при этой стороне. Для вывода формулы опишем вокруг треугольника ABC окружность (пусть ее радиус R) и поместим нуль в центр окружности. Тогда $A=Re^{i\varphi_1}$, $B=Re^{i\varphi_2}$, $C=Re^{i\varphi_3}$ и, следовательно,

$$|BC|^2=R^2|e^{i\varphi_2}-e^{i\varphi_3}|^2=R^2(e^{i\varphi_2}-e^{i\varphi_3})(e^{-i\varphi_2}-e^{-i\varphi_3})=$$
$$=2R^2(1-\cos(\varphi_2-\varphi_3))=4R^2\sin^2\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}.$$

Итак, $|BC| = 2R\sin A$, аналогично $|AC| = 2R\sin B$, $|AB| = 2R\sin C$, откуда и следует теорема синусов:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

В частности, если $a = b$, получаем *теорему Фалеса* (см. выше теорему 1): в равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Мы приобрели еще один, «комплексный», ключ решения геометрических задач. Но прежде чем продемонстрировать, как пользоваться этими ключами — декартовым и комплексным, — выпишем несколько полезных соотношений. Мы формулируем их в виде нескольких утверждений. Доказательства их совершенно элементарны и предоставляются читателю. Но сначала два обозначения. Пусть z_1, z_2, z_3 — три комплексных числа. Выражение

$$(z_1, z_2, z_3) := \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$

называется *простым отношением* этих чисел. Если же z_1, z_2, z_3, z_4 — четверка различных комплексных чисел, то выражение

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$$

(т. е. отношение простых отношений (z_1, z_2, z_3) и (z_1, z_2, z_4)) называется *двойным отношением* этих чисел.

Имеют место следующие соотношения и формулы:

1. Для того чтобы точки z_1, z_2 и z_3 лежали на одной прямой необходимо и достаточно, чтобы

$$(z_1, z_2, z_3) = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3) \tag{1}$$

(иначе говоря, чтобы простое отношение (z_1, z_2, z_3) было вещественным).

И еще одна форма того же отношения. Для $z = x + iy$, $w = \xi + i\eta$ обозначим $\det\{zw\} = x\eta - \xi y$. Точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\det\{z_1 z_2\} + \det\{z_2 z_3\} + \det\{z_2 z_3\} = 0. \tag{2}$$

Этот факт вытекает из геометрического определения детерминанта: $\det\{zw\}$ есть не что иное, как ориентированная площадь параллелограмма, натянутого на векторы Oz и Ow. С учетом этого замечания написанная формула означает, что сумма ориентированных площадей треугольников Oz_1z_2, Oz_2z_3 и Oz_3z_1 равна нулю.

2. Для того чтобы четыре точки $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ лежали на одной прямой или окружности, необходимо и достаточно, чтобы двойное отношение (z_1, z_2, z_3, z_4) было вещественным.

3. Если z — точка пересечения касательных в точках ζ и ζ' единичной окружности, то

$$z = \frac{2}{1/\zeta + 1/\zeta'} \tag{3}$$

(иначе: z есть среднее гармоническое ζ и ζ', которое будем обозначать $\gamma(\zeta, \zeta')$ (рис. 14)).

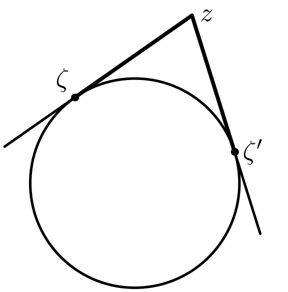


Рис. 14.

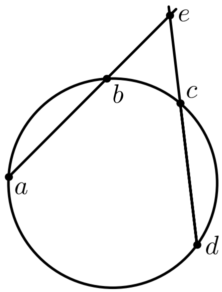


Рис. 15.

4. Если на единичной окружности $|z| = 1$ расположены четыре точки a, b, c, d, то точку e пересечения прямых ab и cd (см. рис. 15) можно найти по формуле

$$e = \frac{(\bar a + \bar b) - (\bar c + \bar d)}{\bar a \bar b - \bar c \bar d}. \tag{4}$$

5. Уравнение срединного перпендикуляра к отрезку $[z_1, z_2]$ имеет вид

$$z(\bar z_2 - \bar z_1) + \bar z(z_2 - z_1) = |z_2|^2 - |z_1|^2. \tag{5}$$

6. Центр окружности, проходящей через точки z_1, z_2, z_3 находится из уравнений

$$z(\bar z_2 - \bar z_1) + \bar z(z_2 - z_1) = |z_2|^2 - |z_1|^2, z(\bar z_3 - \bar z_2) + \bar z(z_3 - z_2) = |z_2|^3 - |z_2|^2. \tag{6}$$

При z_3 получаем $z = \dfrac{z_1|^2 z_2 - |z_2|^2 z_1}{z_2 \bar z_1 - z_1 \bar z_2}$.

7. Если точки A, B и D лежат на единичной окружности и a, b, d — соответствующие им комплексные числа, то число z, соответствующее

основанию перпендикуляра, опущенного из точки D на прямую AB, определяется равенством:

$$z = (a + b + d - ab\bar{d})/2. \tag{7}$$

Перед тем, как переходить к решению задач, вспомним одну забавную историю. В 1960 году вышел пятый том «Математического просвещения», предшественника настоящего издания. В этом томе была опубликована программная статья Николя Бурбаки «Архитектура математики», в которой маститый ученый (на самом деле Бурбаки — это псевдоним группы французских математиков) рассуждал о том, как устроена математика в целом. Последняя фраза статьи в переводе звучит так: «Это [речь шла об аксиоматическом методе] — питательный сок организма в полном его развитии, податливый и плодотворный инструмент исследования, который сознательно используют в своей работе, начиная с Гаусса, все великие мыслители-математики, все те, кто следуя формуле Лежена Дирихле всегда стремились „*идеи* заменить вычислениями“.»

Суждение о величии аксиоматического метода замечательно хотя бы уже по той простой причине, что за противоположную идею (выраженную, скажем, в такой форме: «все великие мыслители-математики, начиная с Ньютона, занимались конкретными задачами, а не аксиоматической шелухой») можно также уверенно держаться, как за безусловную истину. Но в написанном высказывании есть еще один пикантный нюанс: сам Дирихле высказал нечто *в точности противоположное*: согласно нему надо «вычисления заменять *идеями*»!

Но мне хочется (в применении к моей скромной цели) поддержать переводчика: при решении огромного числа геометрических задач (возможно, не всех, но это, как говорится, не доказано), наряду с «идейным» решением, где присутствует воображение, движение, отражение и всякая прочая геометрическая красота, существует рутинное, безыдейное, скучное решение, в котором идеи заменяются простыми вычислениями. И это тоже полезно иметь в виду!

Вот вам несколько примеров таких решений задач, связанных с известными или даже великими именами.

Задача Ньютона. *В описанном около окружности четырехугольнике середины диагоналей коллинеарны (т. е. лежат на одной прямой) с центром окружности* (рис. 16 на с. 43).

Прямая Эйлера. *В любом треугольнике центр тяжести треугольника, его ортоцентр и центр описанного круга лежат на одной прямой* (рис. 17 на с. 43).

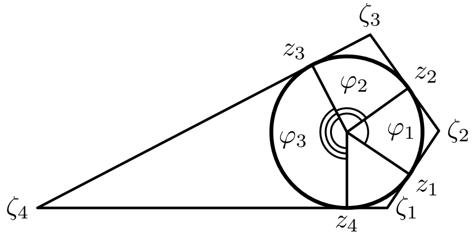


Рис. 16. *Задача Ньютона.*

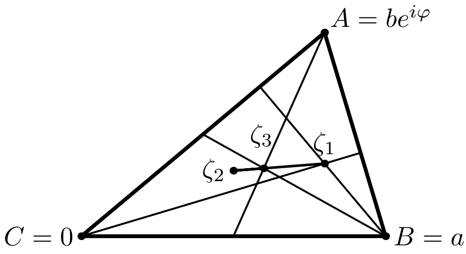


Рис. 17. *Прямая Эйлера.*

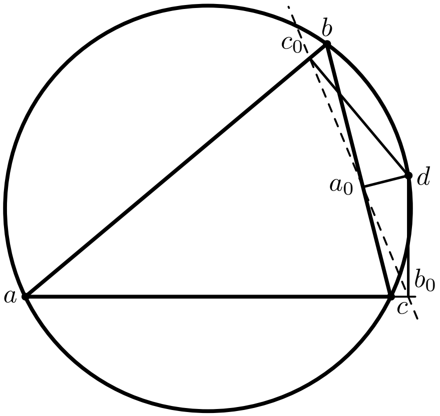


Рис. 18. *Прямая Симпсона.*

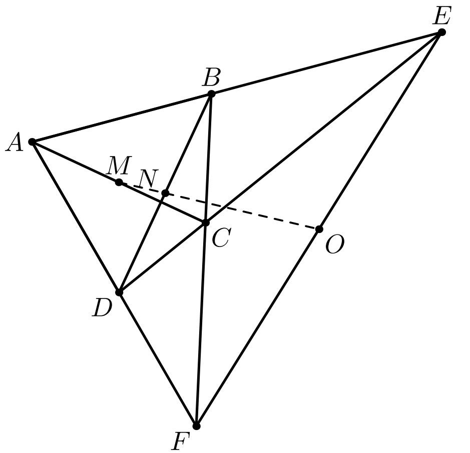


Рис. 19. *Прямая Гаусса.*

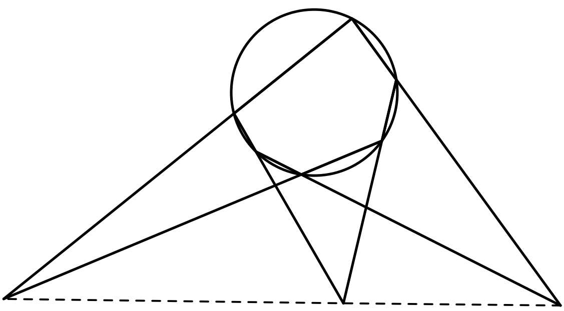


Рис. 20. *Теорема Паскаля.*

Прямая Симпсона. *Пусть из точки, расположенной на окружности, описанной около треугольника, опущены перпендикуляры на его стороны. Тогда основания этих перпендикуляров лежат на одной прямой* (рис. 18 на с. 43).

Прямая Гаусса. *Пусть $ABCD$ — вершины произвольного четырехугольника, E — точка пересечения прямых AB и CD, F — точка пересечения прямых BC и AD, M — середина AC, N — середина BD, O — середина EF. Тогда точки M, N, O лежат на одной прямой* (рис. 19 на с. 43).

Теорема Паскаля. *Точки пересечения прямых, содержащих противоположные стороны вписанного в окружность шестиугольника, лежат на одной прямой* (рис. 20 на с. 43).

Какое блистательное созвездие имен, какое великолепное собрание геометрических шедевров! Попробуйте решить эти задачи геометрически, заменяя вычисления идеями. Если вам это удастся, вы получите истинное наслаждение.

Но тех знаний, которыми мы овладели в течение столь короткого времени, тех формул, которые умещаются на половине страницы, оказывается достаточно, чтобы сразу понять, как решать все эти задачи, а доведение дела до конца становится предметом несложной техники.

В задаче Ньютона естественно воспользоваться формулой (3):

$$\zeta_1 = \gamma(z_1, z_4),\ \zeta_2 = \gamma(z_1, z_2),\ \zeta_3 = \gamma(z_2, z_3),\ \zeta_4 = \gamma(z_3, z_4).$$

А далее для точек $(\zeta_1 + \zeta_3)/2,\ 0,\ (\zeta_2 + \zeta_4)/2$ применить формулу(1). Если хотите, это «идея», а теперь — вычисления. Пусть φ_1 — угол между z_1 и z_2, φ_2 — между z_2 и z_3, φ_3 — между z_3 и z_4. Не ограничив себя в общности, считаем, что $z_1 = 1$. Имеем:

$$\frac{\zeta_1+\zeta_2}{\zeta_2+\zeta_4} = \frac{(1+e^{-i\varphi_1})(e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)}+e^{-i(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)})}{(1+e^{-i(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)})(e^{-i\varphi_1}+e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)}} = \\ = \frac{\cos\varphi_1/2\cos\varphi_3/2}{\cos(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)/2\cos\varphi_2/2} \in \mathbb{R}.$$

В задаче Эйлера решение снова напрашивается: поместим точку C в начало координат, сторону AC пустим по вещественной оси. Тогда $B = a,\ A = be^{i\varphi}$. Без особых усилий вы найдете координаты и центра тяжести, и центра описанной окружности и ортоцентра: центр тяжести $\zeta_3 = \dfrac{b\cos\varphi + a + ib\sin\varphi}{3}$, ортоцентр $\zeta_1 = b\cos\varphi + i(a - b\cos\varphi)\operatorname{ctg}\varphi$, центр описанного круга $\zeta_2 = \dfrac{a}{2} + i\dfrac{b - a\cos\varphi}{2\sin\varphi}$. И останется только проверить, что все они лежат на одной прямой. Без особого труда читатель докажет, что $\dfrac{\zeta_1-\zeta_3}{\zeta_2-\zeta_3}=2$.

В задаче Гаусса надо трижды — для точек M, N, O — воспользоваться формулой (2) и потом воспользоваться формулой (2) для четырех троек точек, лежащих на одной прямой.

Подробнее: записав выражение (2) для точек M, N и O, получим

$$\det\{(A+C)/2\ (B+D)/2\}+\ \det\{(B+D)/2\ (E+F)/2\}+$$
$$+\det\{(E+F)/2\ (A+C)/2\}=\frac{1}{4}(\det\{AB\}+\det\{CB\}+$$
$$+\det\{AD\}+\det\{CD\}+\det\{BE\}+\det\{DE\}+$$
$$+\det\{BF\}+\det\{DF\}+\det\{EA\}+\det\{FA\}+\det\{EC\}+\det\{FC\}),$$

а далее нужно воспользоваться формулой (2) для троек

$$\{A,B,E\},\{C,B,F\},\{A,D,F\},\{C,D,E\},$$

каждая из которых принадлежит одной прямой.

Для решения задачи Симпсона надо трижды воспользоваться формулой (7) и затем — формулой (1).

Наконец, для доказательства теоремы Паскаля воспользуемся формулой (4):

$$\bar h=\frac{a+b-(d+e)}{ab-de},\quad \bar k=\frac{b+c-(e+f)}{bc-ef},\quad \bar g=\frac{c+d-(f+a)}{cd-fa}.$$

Следовательно,

$$\frac{\bar h-\bar k}{\bar k-\bar g}\in\mathbb{R},$$

так как $\bar a=1/a$ и т. д. Для завершения доказательства остается применить формулу (1).

И ведь все наши ходы абсолютно напрашиваются, не так ли?

Post scriptum

Не хотел бы скрывать удовлетворения от того, что написанное мною «Дополнение» вдохновило такого чистого Геометра, как Николай Борисович Васильев, *дополнить* «Дополнение» изящными *аналитическими* решениями двух красивых геометрических задач!

Мы видели, как многие трудные классические теоремы планиметрии выводятся более или менее автоматическими манипуляциями с комплексными числами. Еще естественнее комплексные числа применяются в тех задачах, в геометрических решениях которых помогают различные геометрические преобразования: ведь $z \to iz$ — это поворот на прямой угол, $z \to az$ при вещественном a — гомотетия с коэффициентом a, при комплексном a — композиция гомотетии и поворота (с центром O), и так далее. Но вместо того чтобы развивать эту тему, — она заслуживает отдельной статьи или даже книжки, — мы закончим примерами двух задач, предлагавшихся на олимпиадах весной 1997 года, с которыми справилось лишь несколько участников. Между тем, для любителей все превращать в вычисления с комплексными числами они не составили бы никакого труда.

1. (LX *Московская математическая олимпиада, 10 класс.*) Каждую сторону n-угольника в процессе обхода против часовой стрелки продолжили на ее длину. Оказалось, что концы построенных отрезков служат вершинами правильного n-угольника. Докажите, что исходный n-угольник — тоже правильный.

Решение. Можно считать, что вершины полученного n-угольника — точки $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots \varepsilon^{n-1}$ на комплексной плоскости, где ε — корень n-й степени из 1 с аргументом $2\pi/n$ (или $-2\pi/n$), т. е. $\varepsilon = e^{2\pi/n}$ или $\varepsilon = e^{-2\pi/n}$. Пусть $z_0, z_1, \ldots z_{n-1}$ — вершины исходного многоугольника, причем первая вершина нового многоугольника — точка $z_1 + (z_1 - z_0) = 1$. Тогда из условия получаем такую «циклическую» систему уравнений:

$$2z_1 - z_0 = 1,\, 2z_2 - z_1 = \varepsilon, 2z_3 - z_2 = \varepsilon^2, \ldots,$$
$$2z_k - z_{k-1} = \varepsilon^k,\, 2z_{k+1} - z_k = \varepsilon^{k+1}, \ldots, 2z_0 - z_n = \varepsilon^{n-1}.$$

Умножив эти уравнения последовательно, начиная с первого, на числа $1, 2, 2^2, \ldots 2^{n-1}$ и сложив, получим $z_0(2^n - 1) = 1 + 2\varepsilon + 4\varepsilon^2 + \cdots + 2^{n-1}\varepsilon^{n-1}$. Если же умножить их на те же числа, начиная с k-го уравнения (по циклу — за n-м следует первое, так что последним будет $(k-1)$-е), получим — учитывая, что $\varepsilon^n = 1$:

$$z_0(2^n - 1) = \varepsilon^k(1 + 2\varepsilon + 4\varepsilon^2 + \cdots * 2^{n-1}\varepsilon^{n-1}).$$

Таким образом, $z_k = \varepsilon^k z_0$ (для $k = 0, 1, \ldots, n-1$), откуда следует, что исходный многоугольник — правильный.

2. (III *Соросовская олимпиада, второй (очный) тур, 9 класс.*) Внутри треугольника ABD лежит точка C. Известно, что треугольник ABC —

прямоугольный и равнобедренный, с гипотенузой $AB = 2$, и что $CD = 1$. На луче, проведенном из точки C, перпендикулярном отрезку AD и его пересекающем, отложен отрезок $CK = AD$. Точно так же, на луче, проведенном из точки C, перпендикулярном отрезку BD и его пересекающем, отложен отрезок $CM = BD$. Докажите, что точки K, D, M лежат на одной прямой.

Решение едва ли не короче условия. Будем обозначать комплексные числа, соответствующие точкам, теми же (но маленькими) буквами. Будем считать, что $c = 0$, $a = -1 - i$, $b = 1 - i$ и учтем, что $|d| = 1$.

Тогда

$$k - d = i(d - a) - d = d(i - 1) - a = (d + 1)(i - 1),$$
$$m - d = -i(d - 1) - d = -d(i + 1) + bi = (1 - d)(i + 1),$$

и легко увидеть, что отношение этих двух чисел вещественно, поскольку если $|d| = 1$ — т. е. d лежит на окружности с диаметром $[-1, 1]$, — то отношение $(d+1)/(d-1)$ чисто мнимое (ведь угол, под которым из точки d виден диаметр, — прямой. Впрочем, концовку тоже легко проверить вычислением, не привлекая геометрию.)

Тема номера: основная теорема алгебры

Впервые основная теорема алгебры была сформулирована в XVII веке — сначала Жираром (1629), а затем Декартом, в его знаменитой «Геометрии», изданной в 1637 г. (Неизвестно, был ли Декарт знаком с трудом Жирара.) Вот как формулирует Декарт эту теорему: «Знайте, что в каждом уравнении может быть столько корней, какова его степень. [...] Но иногда случается, что некоторые из этих корней ложны [так Декарт называет отрицательные числа], или даже меньше, чем ничто [здесь речь идет о комплексных корнях].»

В статьях, собранных в этом разделе, читателю предлагается полтора десятка различных доказательств этой теоремы, утверждающей (на нашем современном языке), что любой многочлен степени больше 0 с вещественными и даже комплексными коэффициентами имеет комплексный корень (или ее вещественного варианта: что любой многочлен над $\mathbb{R}$ разлагается на линейные и квадратные множители). Две великие европейские нации — Германия и Франция — спорят за честь первого доказательства основной теоремы алгебры. Французы называют её теоремой Даламбера, немцы — теоремой Гаусса. Но надо сказать, что многие существенные идеи высказывались еще в XVIII веке Эйлером и Лагранжем. А в XIX и XX вв. стала ясна связь этой теоремы практически со всеми крупными разделами математики.

Конечно, смысл и цель такого обилия приводимых далее различных доказательств — не в том, чтобы лишний раз убедиться в правильности теоремы, а и в том, чтобы познакомить читателя с разнообразными понятиями и идеями алгебры, анализа, теории функций комплексного переменного, топологии, теории особенностей, функционального анализа, по-своему объясняющими эту великую теорему.

Одним из поводов к появлению этой темы стали новые «вещественные доказательства», использующие идеологию теории особенностей гладких отображений, о которых рассказано в статьях А. В. Пухликова и (чуть иначе) П. Е. Пушкаря. Поясним здесь совсем коротко некоторые соображения, на которых основаны эти доказательства.

Основой многих «комплексных» доказательств основной теоремы алгебры служит тот факт, что особые точки гладких отображений $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — это точки *ветвления* $z \mapsto z^2$ (или $z \mapsto z^n$), в которых образ маленького кружка вокруг особой точки — такой же кружок, так что отображение «открыто» в окрестности этой точки. А в вещественном случае образом интервала — маленькой окрестности 0 — для самой простой особой точки типа $x \mapsto x^2$ служит полуинтервал, т. е. образуется *складка*; эта ситуация характерна и для гладких отображений $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Объясним с этой точки, почему уравнение $x^2+px+q=0$ (здесь и далее все переменные вещественны) не всегда имеет корни. Формуле умножения $(x-a)(x-b)=x^2+px+q$ соответствует гладкое отображение $(a,b) \mapsto (p,q)$, образ которого — область $p^2 \geqslant 4q$; внутренность этой области покрывается в два слоя, соединяющихся складкой на линии $p^2=4q$.

Почему же произведение двух или, скажем, трех квадратных трехчленов

$$(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)(x^2+ex+f) = x^6+(a+c+e)x^5+\dots+bdf$$

соответствует отображению $(a,\, b,\, \dots,\, f) \mapsto (a+c+e,\, \dots,\, bdf)$ 6-мерного пространства $\mathbb{R}^6$ *на* $\mathbb{R}^6$? Здесь также есть области, покрытые несколькими листами (если все 6 корней вещественны и различны, то 15 листами, поскольку произведение шести сомножителей можно 15 способами разбить на три пары), разумеется, есть и складки. Но оказывается, что для любой «обычной» точки складки среди ее прообразов обязательно найдется такая точка, в которой нет особенности (т. е. окрестность отображается на окрестность), так что ни одна из складок не может служить границей образа. (Конечно, кроме простых особых точек, образующих складки, есть и более сложные, но они составляют многообразие меньшей размерности, которое не может быть границей области в $\mathbb{R}^6$.)

Десять доказательств основной теоремы алгебры

В. М. Тихомиров В. В. Успенский

1. Введение

Всякий многочлен степени $\geqslant 1$ с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень. Эту теорему часто называют *основной теоремой алгебры*. Это один из самых фундаментальных результатов во всей математике. Существуют разные точки зрения по вопросу о том, кто первым доказал эту теорему (и что вообще это означает: «доказать теорему»). Ее называют и «теоремой Даламбера» [16], и «теоремой Эйлера–Лагранжа» [3], однако чаще всего связывают с именем Гаусса (считается, что Гаусс дал четыре доказательства основной теоремы).

Дадим слово Феликсу Клейну [4, с. 69]:

> «Основная теорема алгебры сформулирована и в известной мере доказана Даламбером в его „Recherches sur le calcul intégral“ („Исследования по интегральному исчислению“, 1746 г.). $< \cdots >$ Французы поэтому и сейчас называют эту теорему „теоремой Даламбера“, а Гаусс назвал свою диссертацию „demonstratio nova“ („новое доказательство“), чем, следовательно, подчеркнул, что он никоим образом не претендует на достижение, которое так часто ему приписывается, — создание „первого строгого доказательства“ этой теоремы. Разумеется, его сочинение начинается подробной критикой всех предшествующих доказательств».

А вот что пишет по этому поводу Н. Бурбаки [2, с. 161–162] (цитируем с некоторыми сокращениями):

> «В течение XVII и XVIII вв. математики постепенно приходят к убеждению, что мнимые числа, дающие возможность решать уравнения второй степени, позволяют также решать алгебраические уравнения любой степени. В XVIII в. были опубликованы многочисленные попытки доказательства этой теоремы; среди них не было ни одной, которая бы не вызывала серьезных возражений. В результате внимательного изучения всех попыток доказательств и детальной критики их пробелов Гаусс поставил целью своей диссертации (написанной в 1797 г., изданной в 1799 г.) дать, наконец, строгое доказательство. Взяв за основу идею, высказанную мимоходом Даламбером, он замечает, что точки (a, b) плоскости,

> для которых $a + bi$ являются корнями многочлена $P(x + yi) = X(x, y) + iY(x, y)$, представляют собой точки пересечения кривых $X = 0$ и $Y = 0$. Путем качественного изучения этих кривых он показывает, что кривые пересекаются. Это доказательство по своей ясности и оригинальности представляет замечательный прогресс по сравнению со всеми предшествующими и является примером чисто топологического рассуждения, примененного к алгебраической проблеме.»

Гаусс, критикуя рассуждение Даламбера, добавляет, что «истинный стержень доказательства не затрагивается всеми этими возражениями». Действительно, с современной точки зрения пробелы в доказательстве Даламбера легко устранить. Суть этого доказательства такова. Пусть $p(z)$ — многочлен с комплексными коэффициентами. Рассмотрим точку a, в которой функция $|p(z)|$ достигает минимума. Тогда $p(a) = 0$, так как иначе можно было бы найти направление, при движении вдоль которого из точки a модуль функции $p(z)$ уменьшался бы. Здесь все правильно, но почему $|p(z)|$ достигает минимума? Современный ответ краток: по соображениям компактности. Однако в 1746 г., когда появилось доказательство Даламбера, до теоремы Больцано–Вейерштрасса: всякая ограниченная последовательность имеет предельную точку — оставалось еще около века. Привычное же определение компактности: всякое открытое покрытие содержит конечное подпокрытие — появилось уже в нашем веке, когда П. С. Александров и П. С. Урысон приняли за определение свойство отрезка, установленное Борелем и Лебегом.

Доказательства Эйлера и Лагранжа также содержали «истинные стержни», но имели и серьезные упущения с точки зрения современных понятий о строгости. Вообще говоря, то же можно сказать и о гауссовских доказательствах: использованные в них «очевидные» топологические факты нуждаются в обосновании. Впрочем, во втором доказательстве Гаусса все сводилось к минимуму: к тому, что вещественный полином нечетной степени имеет вещественный корень.

Сейчас известно много различных доказательств основной теоремы алгебры; ниже мы приводим десять из них. Разумеется, чтобы убедиться в истинности какого-либо утверждения, в математике достаточно одного доказательства (это отличие математики от исторической науки сыграло важную роль при выборе великим математиком А. Н. Колмогоровым своей профессии — см. [17, с. 4]). Но наша цель состоит как раз в том, чтобы показать разнообразие методов, которые можно применить для доказательства основной теоремы алгебры, и тем самым установить связи этой теоремы с топологией, комплексным анализом и другими областями математики. Рассматриваемая нами теорема как никакая другая подходит для подобных целей.

Наши доказательства сильно варьируются по уровню того, что предполагается известным, и потому не все они одинаково хорошо подходят для первоначального знакомства с теоремой. Доказательства 1 и 7 опираются на минимум предварительных сведений, а в других доказательствах мы ссылаемся на теорию Галуа или на теорему Лефшеца о неподвижной точке, не смущаясь тем, что соответствующие понятия не входят в обязательную университетскую программу. Заинтересованный читатель сумеет найти необходимые сведения в цитируемой литературе. Во многих доказательствах мы пользуемся понятием голоморфной функции и римановой поверхности; эти понятия восходят к Коши, Риману и Герману Вейлю.

В основе большинства доказательств основной теоремы алгебры лежит идея геометрического изображения комплексных чисел: множество комплексных чисел отождествляется с плоскостью. Эта идея принадлежит Гауссу и развивает великую мысль Декарта о единстве алгебры и геометрии: каждой точке плоскости или пространства можно поставить в соответствие числа — ее координаты, после чего язык алгебры и язык геометрии становятся взаимозаменяемыми. Сейчас это кажется настолько привычным, что трудно представить, насколько революционными были эти идеи в свое время.

2. Эквивалентные формулировки

Понятие комплексного числа мы считаем известным (см. [7, 5]). Напомним лишь, что всякое комплексное число однозначно записывается в виде $a + bi$, где a и b — действительные числа, а i — мнимая единица, удовлетворяющая равенству $i^2 = -1$. Комплексные числа можно складывать и умножать по обычным правилам, при этом каждое ненулевое комплексное число z имеет обратное z^{-1}. Таким образом, комплексные числа образуют *поле*. Это поле обозначается через $\mathbb{C}$.

Для произвольного поля K через $K[X]$ обозначается *кольцо многочленов над* K (или *с коэффициентами в* K). Многочлен с коэффициентами в K — это формальное выражение вида

$$p(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0, \text{ где } a_0, \ldots, a_n \in K.$$

Такой многочлен можно рассматривать как функцию из K в K, которая каждому $x \in K$ ставит в соответствие элемент $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in K$. *Корень* многочлена $p(X)$ — это такое $x \in K$, для которого $p(x) = 0$.

Степень ненулевого многочлена $p(X)$ — это такое целое число n, для которого $p(X) = a_n X^n + \dots + a_0$ и $a_n \neq 0$.

Лемма 1. *Число различных корней ненулевого многочлена не превосходит его степени.*

Докажем лемму индукцией по степени n многочлена. Предположим, что многочлен $p(X) = a_n X^n + \dots + a_0$ степени n имеет по меньшей мере $n+1$ различных корней $a_1, \dots, a_{n+1}$. Рассмотрим многочлен $q(X) = a_n(X - a_1)\dots(X - a_n)$. Тогда $p \neq q$, так как $p(a_{n+1}) = 0 \neq q(a_{n+1})$. Разность $r = p - q$ является ненулевым многочленом степени $< n$, имеющим по меньшей мере n корней $a_1, \dots, a_n$. Это противоречит предположению индукции.

Если поле K бесконечно (о строении конечных полей см. [5, 9]), то всякий ненулевой многочлен $p(X)$ представляет ненулевую функцию (поскольку число корней многочлена $p(X)$ конечно) и, следовательно, различные многочлены представляют различные функции.

Многочлены нулевой степени отождествляются с ненулевыми элементами поля K и корней не имеют. Всякий многочлен первой степени имеет ровно один корень. Всякий ли многочлен степени $\geqslant 2$ имеет хотя бы один корень? Ответ зависит от поля K. Пусть $\mathbb{R}$ — поле действительных (или вещественных) чисел. Многочлен X^2+1, рассматриваемый как элемент кольца $\mathbb{R}[X]$, не имеет корней в $\mathbb{R}$, и именно это обстоятельство мотивирует расширение поля $\mathbb{R}$ до поля комплексных чисел $\mathbb{C}$, в котором многочлен X^2+1 имеет корни i и $-i$. Из каждого комплексного числа можно извлечь квадратный корень, поэтому известная формула для решения квадратного уравнения показывает, что всякий многочлен из $\mathbb{C}[X]$ второй степени имеет корень в $\mathbb{C}$. Если бы существовал многочлен p из $\mathbb{C}[X]$ степени > 2, не имеющий корней в $\mathbb{C}$, то можно было построить конечное расширение поля $\mathbb{C}$, в котором p имеет корень (по аналогии с тем, как само поле $\mathbb{C}$ получается присоединением к $\mathbb{R}$ корней многочлена X^2+1). *Конечное расширение* поля K — это поле L, содержащее K в качестве подполя и такое, что L является конечномерным векторным пространством над K. Размерность векторного пространства L над K называется *степенью* расширения L и обозначается через $[L : K]$. Одна из эквивалентных формулировок основной теоремы алгебры заключается в том, что у поля $\mathbb{C}$ нет собственных (т. е. отличных от самого поля $\mathbb{C}$) конечных расширений.

Теперь дадим общее определение: поле K называется *алгебраически замкнутым*, если всякий многочлен степени > 0 с коэффициентами в K

имеет корень в K. Эквивалентно, поле K алгебраически замкнуто, если у него нет собственных конечных расширений. Нам будет удобно использовать еще две характеризации алгебраически замкнутых полей. Многочлен над K называется *неприводимым*, если он имеет степень > 0 и не представи́м в виде произведения двух многочленов из $K[X]$ степени > 0. Неприводимые многочлены в кольце $K[X]$ аналогичны простым числам в кольце $\mathbb{Z}$ целых чисел: всякий многочлен из $K[X]$ раскладывается в произведение неприводимых, причем разложение однозначно с точностью до порядка сомножителей и их умножения на элементы из K. Это свойство кольца $K[X]$ вытекает из того, что $K[X]$ является *кольцом главных идеалов*: каждый идеал порождается одним элементом. Все многочлены степени 1 неприводимы, а обратное верно тогда и только тогда, когда поле K алгебраически замкнуто.

Пусть E — векторное пространство над полем K и $A : E \to E$ — линейный оператор. Вектор $v \in E$ называется *собственным вектором* оператора A, если $v \neq 0$ и $Av = \lambda v$ для некоторого $\lambda \in K$.

Теорема 1. *Для всякого поля K следующие условия равносильны:*

1) всякий многочлен из $K[X]$ степени > 0 имеет корень в K (иными словами, поле K алгебраически замкнуто);

2) если E — конечномерное векторное пространство над K, не сводящееся к нулю, то всякий линейный оператор $A : E \to E$ имеет собственный вектор;

3) поле K не имеет конечных расширений, отличных от K;

4) всякий неприводимый многочлен над K имеет степень 1.

1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $A : E \to E$ — линейный оператор и $p(X) = \det(X \cdot 1_E - A)$ — характеристический многочлен оператора A. Здесь 1_E — тождественный оператор в E. Если K алгебраически замкнуто, то многочлен p имеет корень. Следовательно, при некотором $\lambda \in K$ оператор $\lambda \cdot 1_E - A$ имеет нулевой определитель и потому $(\lambda \cdot 1_E - A)v = 0$ для некоторого ненулевого вектора $v \in E$. Тогда $Av = \lambda v$, так что v — собственный вектор оператора A.

2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть L — конечное расширение поля K. Зафиксируем $x \in L$, и пусть $A : L \to L$ — линейный оператор умножения на x, определенный формулой $A(y) = xy$. Согласно 2), у оператора A есть собственный вектор над K. Таким образом, $xv = Av = \lambda v$ при некоторых $\lambda, v \in K$, $v \neq 0$. Следовательно, $x = \lambda \in K$ и $L = K$.

3) $\Longrightarrow$ 4). Если $p \in K[X]$ — неприводимый многочлен степени $n > 1$, то факторкольцо кольца $K[X]$ по идеалу, порожденному многочленом p, является собственным расширением поля K (степени n).

4) $\Longrightarrow$ 1). Это очевидно, поскольку всякий многочлен разлагается в произведение неприводимых.

Мы видим, что основную теорему алгебры можно сформулировать так: поле комплексных чисел удовлетворяет эквивалентным условиям теоремы 1. Можно дать еще одну по существу эквивалентную формулировку, относящуюся уже к полю $\mathbb{R}$ действительных чисел: *всякий неприводимый многочлен над $\mathbb{R}$ имеет степень $\leqslant 2$.* Покажем, что это утверждение равносильно алгебраической замкнутости поля $\mathbb{C}$. Для каждого $a \in \mathbb{C}$ пусть $p_a \in \mathbb{R}[X]$ — *минимальный многочлен* числа a, т. е. многочлен минимальной возможной степени, имеющий a своим корнем. Главный идеал $\{p \in \mathbb{R}[X] : p(a) = 0\}$ кольца $\mathbb{R}[X]$ порождается многочленом p_a. Иными словами, всякий многочлен из $\mathbb{R}[X]$, имеющий a своим корнем, делится на p_a. Если $a \in \mathbb{R}$, то $p_a = X - a$, если же $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, то $p_a = (X-a)(X-\bar{a})$, где $\bar{a}$ означает число, комплексно сопряженное к a (если $a = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, то $\bar{a} = x - yi$). Предположим теперь известным, что поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто. Пусть $q \in \mathbb{R}[X]$ — произвольный многочлен степени > 2. Тогда q имеет корень $a \in \mathbb{C}$. Следовательно, q делится в $\mathbb{R}[X]$ на многочлен p_a степени $\leqslant 2$ и потому не является неприводимым. Обратно, пусть известно, что все неприводимые многочлены в $\mathbb{R}[X]$ имеют степень $\leqslant 2$. Тогда всякий отличный от константы многочлен из $\mathbb{R}[X]$ разлагается в произведение многочленов степени $\leqslant 2$ и потому имеет корень в $\mathbb{C}$. Пусть теперь p — отличный от константы многочлен над $\mathbb{C}$, а $\bar{p}$ — многочлен, полученный из p заменой всех коэффициентов на комплексно-сопряженные. Многочлен $p\bar{p}$ имеет вещественные коэффициенты и, следовательно, имеет корень $a \in \mathbb{C}$. Число a является корнем либо многочлена p, либо многочлена $\bar{p}$. В последнем случае $\bar{a}$ является корнем для p. Таким образом, p имеет корень.

3. Доказательства

Первое доказательство. ◀ Пусть $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ — многочлен степени $n \geqslant 1$ с комплексными коэффициентами (старший коэффициент мы считаем равным единице, это не ограничивает общности). Предположим, что p не имеет корней, и придем к противоречию.

Пусть z равномерно движется по окружности радиуса R с центром в нуле в положительном направлении (т. е. против часовой стрелки). Точка z^n будет при этом двигаться по окружности радиуса R^n с угловой скоростью, в n раз превосходящей угловую скорость точки z. Это следует из представления z в «тригонометрической форме»: если $z = R(\cos\varphi + \sin\varphi)$, то $z^n = R^n(\cos n\varphi + \sin n\varphi)$. Когда z совершает один полный оборот, точка z^n совершает n оборотов вокруг нуля. Положим $b(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$. При больших R число $b(z)$ пренебрежимо мало по сравнению с z^n, поэтому движение точки $p(z) = z^n + b(z)$, если наблюдать его издалека, будет практически неотличимо от движения точки z^n. Следовательно, точка $p(z)$ совершает столько же оборотов вокруг нуля, сколько и z^n, т. е. n оборотов. Существенно здесь то, что отрезок, соединяющий $p(z)$ с z^n, не проходит через 0 (при $|b(z)| < |z^n|$), поэтому движение точек $p(z)$ и z^n можно продеформировать одно в другое, не проходя при этом через 0 и тем самым не меняя числа оборотов.

С другой стороны, если R близко к нулю, то $p(z)$ близко к a_0. Когда z совершает полный оборот по окружности малого радиуса, $p(z)$ описывает замкнутую кривую вблизи a_0. Поскольку $a_0 \neq 0$ (иначе p имел бы корень 0), такая кривая не охватывает нуля, так что при малых R точка $p(z)$ совершает 0 оборотов вокруг нуля.

Будем теперь менять R и следить за тем, какое число $n(R)$ оборотов совершает точка $p(z)$ вокруг нуля, когда z делает один полный оборот по окружности радиуса R. «Число оборотов» точки $p(z)$ вокруг нуля было бы не определено, если бы эта точка при своем движении проходила через нуль. Так как мы предполагаем, что $p(z) \neq 0$ при всех z, то $n(R)$ определено при всех R. Ясно, что $n(R)$ непрерывно зависит от R. Поскольку функция $n(R)$ принимает только целые значения, она должна быть постоянна. Однако мы видели, что $n(R) = n$ при больших R и $n(R) = 0$ при малых R — противоречие. ►

Комментарий. Это доказательство приводится в [6]. Неясно, кто придумал его первым; Колмогоров излагал его в своих лекциях в 30-е годы. Вот как пишут об этом В. Г. Болтянский и И. М. Яглом [8, с.11]: «В 1937 году в своей лекции „Основная теорема алгебры“ академик А. Н. Колмогоров изложил по существу полное доказательство теоремы о существовании комплексного корня у всякого алгебраического уравнения. Это доказательство, получившее в школьном кружке наименование „Дама с собачкой“ (если дама гуляет вокруг дома с собачкой на поводке, то собачка будет вынуждена сделать столько же оборотов вокруг дома, сколько и сама дама) впоследствии точно в такой же форме было опубликовано в [6].»

Ценители математической строгости могут остаться неудовлетворенными таким рассуждением: ведь мы не определили, что такое «число оборотов», и не доказали, что оно остается постоянным при непрерывных деформациях. Укажем, как устранить эти недостатки.

Пусть f — непрерывная комплексная функция, определенная на отрезке $[0,1]$ и принимающая равные значения на концах отрезка. Предположим, что $f(t) \neq 0$ при всех t. Тогда *число оборотов* вокруг нуля, совершаемых точкой $f(t)$ при движении t от 0 к 1 (это число мы будем обозначать через $W(f)$), определяется следующим образом. Пусть $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ — единичная окружность, и $e : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ — функция, определенная формулой $e(t) = \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t$ (эта функция «наматывает» прямую на окружность). Предположим сперва, что f принимает значения в $\mathbb{U}$, то есть что $|f(t)| = 1$ при всех t. Существует непрерывная функция $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, такая, что $f(t) = e(h(t))$ для всех $t \in [0,1]$. Если h' — другая функция с таким же свойством, то $h' = h + c$ для некоторой константы c (являющейся целым числом), поэтому целое число $W(f) = h(1) - h(0)$ определено однозначно. Это целое число и называется числом оборотов. В общем случае, когда значения функции f необязательно лежат в $\mathbb{U}$, полагаем $W(f) = W(g)$, где $g : [0,1] \to \mathbb{U}$ — функция, определенная формулой $g(t) = f(t)/|f(t)|$.

Пусть теперь для каждого $s \in [0,1]$ задана функция $f_s : [0,1] \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$, такая, что $f_s(0) = f_s(1)$. Предположим, что семейство $\{f_s\}$ непрерывно зависит от параметра s в том смысле, что функция $F(s,t) = f_s(t)$ непрерывна на квадрате $[0,1]^2$. Тогда $W(f_s)$ не зависит от s (это и означает, что число оборотов не меняется при непрерывных деформациях). Для доказательства предположим, что значения функции F лежат в $\mathbb{U}$ (общий случай сводится к этому заменой функции F на $F/|F|$). Существует такая непрерывная функция $H : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, для которой $F = e \circ H$. Целое число $W(f_s) = H(s,1) - H(s,0)$ непрерывно зависит от s и потому постоянно.

При определении числа $W(f)$ и при доказательстве его инвариантности при деформациях мы пользовались следующим свойством функции $e : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$: если X — отрезок или квадрат и $F : X \to \mathbb{U}$ — непрерывная функция, то существует непрерывная функция $H : X \to \mathbb{R}$ такая, что $F = e \circ H$. Такая функция H называется *поднятием* функции F относительно e. Существование поднятий в нашем случае нетрудно доказать непосредственно: например, если X — квадрат, то можно разбить X на маленькие квадратики, образ каждого из которых при F является собственным подмножеством окружности $\mathbb{U}$, и строить поднятие H последовательно на этих квадратиках, проходя их ряд за рядом. На самом деле отображение e является примером *накрытия*, и можно сослаться на общую теорему: отображение односвязного пространства всегда может быть поднято в накрытие [15, 13].

Мы определили отображение e через синус и косинус. При последовательном построении основ анализа более естественно поступить наоборот: сперва ввести отображение e, а затем через него определить синус и косинус [12]. Именно, $e(t) = e^{2\pi i t}$, где $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ для любого комплексного z. Отметим, что накрытие $e : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ является гомоморфизмом топологических групп.

Второе доказательство [10]. ◀ Многочлен $p \in \mathbb{C}[X]$ степени n задает отображение степени n комплексной проективной прямой в себя. Следовательно, это отображение сюръективно при $n > 0$. В частности, уравнение $p(z) = 0$ имеет решение. ▶

Комментарий. Поясним понятия, которые использованы в этом доказательстве. Для наших целей комплексную проективную прямую $\mathbb{C}P^1$ можно определить просто как одноточечную компактификацию пространства $\mathbb{C}$. Иными словами, $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, причем окрестностями бесконечно удаленной точки служат дополнения до замкнутых ограниченных подмножеств в $\mathbb{C}$. Пространство $\mathbb{C}P^1$ имеет естественную структуру ориентированного гладкого многообразия, при этом $\mathbb{C}P^1$ диффеоморфно двумерной сфере. Отображение $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ продолжается до гладкого отображения $\hat{p} : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ такого, что $\hat{p}(\infty) = \infty$.

Каждому непрерывному отображению между ориентированными компактными связными топологическими многообразиями одной размерности сопоставляется целое число, называемое *степенью* отображения. В первом доказательстве мы фактически ввели (под названием «число оборотов») понятие степени отображения окружности в себя. Для гладких отображений гладких многообразий степень можно определить следующим образом. Пусть $f : M \to N$ — гладкое отображение между k-мерными ориентированными компактными связными многообразиями. Точка $x \in M$ называется *критической*, если дифференциал df_x, являющийся линейным отображением касательного пространства T_xM в касательное пространство $T_{f(x)}N$, вырожден. Точка $y \in N$ называется *регулярным значением*, если она не является образом никакой критической точки $x \in M$. Из теоремы Сарда вытекает [10], что регулярные значения существуют. Пусть $y \in N$ регулярно. Тогда число точек $x \in X$, таких, что $f(x) = y$, конечно. Пусть $x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q}$ — все такие точки, причем дифференциал отображения f сохраняет ориентацию в точках $x_1, \dots, x_p$ и обращает ориентацию в точках $x_{p+1}, \dots, x_{p+q}$. *Степенью* отображения f называется число $p-q$. Доказывается, что это число не зависит от выбора регулярного $y \in N$. Если $f(M)$ отлично от N, то степень равна нулю, так как любое $y \in N \setminus f(M)$ регулярно, а для такого y мы имеем $p = q = 0$. Таким образом, если степень отображения $f : M \to N$ отлична от нуля, то $f(M) = N$.

Для отображения $\hat{p} : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ критическими точками служат нули производной p' и (при $n > 1$) точка ∞. Таких точек конечное число. Во всякой некритической точке z дифференциал является умножением на ненулевое комплексное число $p'(z)$ и потому сохраняет ориентацию. Отсюда вытекает, что степень отображения $\hat{p}$ положительна и, следовательно, $\hat{p}$ сюръективно. На самом деле степень отображения $\hat{p}$ равна n. Это следует из того, что для каждого регулярного y уравнение $p(z) = y$ имеет n различных решений.

Отображение $\hat{p} : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ является *n-листным разветвленным накрытием* [14]. Для таких отображений корректность определения степени (т. е. независимость от выбора регулярного значения y) очевидна. Поэтому проведенное доказательство имеет вариант, не зависящий от общего определения степени.

Третье доказательство. Рассуждение, намеченное в предыдущем абзаце, можно обобщить.

◀ Непостоянное голоморфное отображение между компактными связными римановыми поверхностями является n-листным разветвленным накрытием при некотором $n > 0$ и потому сюръективно [14]. Применим эту теорему к отображению $\hat{p} : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$, определенному многочленом p степени $n > 0$. Комплексная проективная прямая $\mathbb{C}P^1$ имеет естественную структуру компактной связной римановой поверхности, а отображение $\hat{p}$ голоморфно. Следовательно, $\hat{p}$ сюръективно. В частности, p имеет корень. ▶

Комментарий. *Риманова поверхность* — это голоморфное многообразие комплексной размерности 1. Такое многообразие может быть покрыто открытыми множествами, каждое из которых биголоморфно эквивалентно (т. е. изоморфно как риманова поверхность) открытому единичному кругу U в $\mathbb{C}$. Всякое голоморфное отображение $f : X \to Y$ одной римановой поверхности в другую локально устроено так же, как отображение $z \mapsto z^k$ из U в себя при некотором $k > 0$ [14, предложение 2.1]. Точнее, пусть $x \in X$ и $y = f(x)$. Если f непостоянно на компоненте поверхности X, содержащей точку x, то существуют окрестности Ox и Oy точек x и y на X и Y, соответственно, изоморфизмы римановых поверхностей $\varphi : U \to Ox$ и $\psi : Oy \to U$ и целое число $k > 0$, такие, что $\varphi(0) = x$,

$\psi(y) = 0$, $f(Ox) = Oy$ и $\psi f \varphi(z) = z^k$ для всех $z \in U$. Каждая точка в $Oy \setminus \{y\}$ имеет ровно k прообразов в Ox. Число k называется *индексом ветвления* отображения f в точке x. Обозначим этот индекс через $e_f(x)$. Если $e_f(x) > 0$, то говорят, что f *разветвлено* в x. Предположим, что X и Y компактны и связны. Пусть $y \in Y$, $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_p\}$, $k_i = e_f(x_i)$, $i = 1, \ldots, p$. У точки y есть такая окрестность Oy, что $f^{-1}(Oy) = Ox_1 \cup \cdots \cup Ox_p$, причем окрестности $Ox_1, \ldots, Ox_p$ попарно не пересекаются и отображение $f|Ox_i : Ox_i \to Oy$ изоморфно отображению $z \mapsto z^{k_i}$ круга U в себя, $i = 1, \ldots, p$. Положим $n = n(y) = k_1 + \cdots + k_p$. Для любого $y' \in Oy \setminus \{y\}$ прообраз $f^{-1}(y')$ состоит ровно из n точек, в каждой из которых отображение f не разветвлено, поэтому $n(y') = n$. Таким образом, функция $n(y)$ локально постоянна на Y. Ввиду связности Y она постоянна и всюду принимает значение n. В частности, $n(y) > 0$ для любого $y \in Y$, так что f сюръективно. Утверждение, что f является n-листным разветвленным накрытием, означает, что f устроено так, как описано выше.

Четвертое доказательство [14, 16]. ◀ Многочлен p степени n задает мероморфную функцию на $\mathbb{C}P^1$ с полюсом порядка n в точке ∞. Мероморфная функция на компактной римановой поверхности имеет одинаковое число нулей и полюсов, если каждый нуль и полюс считать столько раз, какова его кратность. Следовательно, многочлен p имеет, с учетом кратностей, ровно n нулей. ▶

Комментарий. Мероморфная функция на римановой поверхности X — это такая голоморфная функция $f : X \setminus D$, что D замкнуто и дискретно в X, а f имеет полюс в каждой точке $a \in D$, т. е. $\lim_{x \to a} |f(x)| = \infty$. Такую функцию можно отождествить с голоморфной функцией из X в $\mathbb{C}P^1$, которую мы обозначим снова через f. Определим *порядок* $\mathrm{ord}_x f$ функции f в точке $x \in X$. Предположим для простоты, что $X = U$ и $x = 0$. Существует и единственно такое целое k, что $f(z) = z^k g(z)$ при всех $z \in U \setminus \{0\}$, где g — голоморфная функция в U, такая, что $g(0) \neq \neq 0$. Полагаем $\mathrm{ord}_x f = k$. Это определение переносится на произвольные римановы поверхности. Если $k = \mathrm{ord}_x f > 0$, то f имеет нуль порядка k (или кратности k) в точке x, если $\mathrm{ord}_x f = -k < 0$, то f имеет полюс порядка k.

Утверждение, что *мероморфная функция f на компактной римановой поверхности X имеет одинаковое число нулей и полюсов*, означает, что *сумма $\sum_{x \in X} \mathrm{ord}_x f$, в которой только конечное число членов отлично от нуля, равна нулю.* Будем рассматривать f как голоморфное отображение из X в $\mathbb{C}P^1$. Если x — нуль функции f, то индекс ветвления $e_f(x)$ равен порядку $\operatorname{ord}_x(f)$, если x — полюс, то $e_f(x) = -\operatorname{ord}_x(f)$. Таким образом, равенство $\sum_{x\in X} \operatorname{ord}_x f = 0$ вытекает из установленного в предыдущем доказательстве постоянства функции $y \mapsto n(y) = \sum_{f(x)=y} e(x)$, которая каждому $y \in \mathbb{C}P^1$ сопоставляет сумму индексов ветвления по всем точкам $x \in f^{-1}(y)$.

Дадим другое доказательство этого факта, основанное на понятии вычета дифференциальной формы и на теореме Стокса.

◄ Мероморфная дифференциальная форма ω в открытом множестве $X \subset \mathbb{C}$ записывается в виде $\omega = f\,dz$, где f — мероморфная функция в X. *Вычет* $\operatorname{res}_x \omega$ формы ω в точке $x \in X$ — это деленный на $2\pi i$ интеграл формы ω по краю маленькой окрестности точки x. Если f имеет полюс в точке x и $f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-x)^n$, где $k = \operatorname{ord}_x f < 0$, то $\operatorname{res}_x f\,dz = a_{-1}$. Если f голоморфна в x, то $\operatorname{res}_x f\,dz = 0$. Понятие мероморфной формы и ее вычета в точке переносится на произвольные римановы поверхности.

Докажем, что *сумма вычетов мероморфной дифференциальной формы на компактной римановой поверхности равна нулю.* Пусть ω — мероморфная дифференциальная форма на компактной римановой поверхности X, и $x_1, \ldots, x_n \in X$ — все полюса формы ω. Окружим каждый полюс x_j маленькой открытой окрестностью V_j с гладкой границей и положим $V = V_1 \cup \cdots \cup V_n$. Тогда

$$\sum_{x\in X} \operatorname{res}_x \omega = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{res}_{x_j} \omega = \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial V_j} \omega/2\pi i = \int_{\partial V} \omega/2\pi i.$$

При этом считается, что V имеет естественную ориентацию римановой поверхности, а ∂V имеет ориентацию края. Рассмотрим ориентированное компактное многообразие с краем $Y = X \setminus V$. Его краем является ориентированное многообразие $\partial Y = -\partial V$, где знак минус указывает на изменение ориентации. Применим теорему Стокса к многообразию Y и дифференциальной форме ω. Согласно этой теореме, $\int_{\partial Y} \omega = \int_Y d\omega$. Форма ω голоморфна в окрестности $X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ многообразия Y и потому замкнута: $d\omega = 0$. Таким образом,

$$\sum_{x\in X} \operatorname{res}_x \omega = \int_{\partial V} \omega/2\pi i = -\int_{\partial Y} \omega/2\pi i = 0,$$

что и требовалось.

Пусть теперь f — мероморфная функция на компактной римановой поверхности X. Докажем, что f имеет одинаковое число нулей и полюсов (с учетом кратностей), т. е. что $\sum_{x\in X} \operatorname{ord}_x f = 0$. Рассмотрим мероморфную дифференциальную форму $\omega = df/f$. Эта форма имеет полюса в нулях и полюсах функции f, причем $\operatorname{res}_x \omega = \operatorname{ord}_x f$ для каждого $x \in X$. Для доказательства этого равенства можно ограничиться случаем, когда $x = 0$ и $f(z) = z^k g(z)$, где $g(z)$ голоморфна в окрестности нуля и $g(0) \neq 0$. Тогда $\omega = df/f = kdz/z + dg/g$. Форма dg/g голоморфна в нуле, поэтому $\operatorname{res}_0 \omega = \operatorname{res}_0 kdz/z = k = \operatorname{ord}_0 f$. Таким образом,

$$\sum_{x\in X} \operatorname{ord}_x f = \sum_{x\in X} \operatorname{res}_x \omega = 0. \qquad \blacktriangleright$$

Пятое доказательство [14]. Мы видели, что основная теорема алгебры вытекает из следующего факта: *всякое непостоянное голоморфное отображение $f : M \to N$ между компактными связными римановыми поверхностями сюръективно.* Выведем этот факт из теоремы об открытом отображении: *f переводит открытые множества в открытые.*

$\blacktriangleleft$ Из теоремы об открытом отображении следует, что $f(M)$ открыто в N. С другой стороны, так как M компактно, то и $f(M)$ компактно и, следовательно, замкнуто в N. Так как N связно, т. е. не содержит собственных непустых открыто-замкнутых множеств, то $f(M) = N$.$\blacktriangleright$

Комментарий. По сути дела, это и есть «истинный стержень» доказательства Даламбера. Для Даламбера был, вероятно, очевиден тот факт, что $f(\mathbb{C})$ замкнуто, и тогда (в предположении отсутствия корня) можно найти точку этого множества, ближайшую к нулю. А далее Даламбер утверждал, что это ведет к противоречию, по сути дела, доказывая открытость f. Для этого он разлагал обратную к f функцию в ряд по дробным степеням. Конечно, не зная того, чему сейчас учат у нас на первом курсе, Даламбер не мог доказать свой результат так, чтобы получить хорошую оценку у придирчивого современного преподавателя, но суть дела он понимал прекрасно!

Шестое доказательство. Предыдущее доказательство имеет вариант, в котором ссылка на теорему об открытом отображении заменяется ссылкой на теорему об обратной функции.

$\blacktriangleleft$ Пусть p — многочлен степени > 0, $f = \hat{p} : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ — отображение, определенное этим многочленом. Пусть $X \subset \mathbb{C}P^1$ — конечное множество, состоящее из всех нулей производной p' многочлена p и из бесконечно удаленной точки. В каждой точке $x \in \mathbb{C}P^1 \setminus X$ дифференциал отображения f невырожден, и из теоремы об обратной функции следует, что f является локальным диффеоморфизмом в точке x. В частности, f

открыто в x, т. е. образ любой окрестности точки x является окрестностью точки $f(x)$. Следовательно, множество $V = f(\mathbb{C}P^1 \setminus X)$ открыто в $\mathbb{C}P^1$. С другой стороны, множество $F = f(\mathbb{C}P^1)$ компактно и потому замкнуто. Так как $F = V \cup f(X)$, разность $F \setminus V$ содержится в $f(X)$ и потому конечна. Поскольку $\mathbb{C}P^1$ гомеоморфно двумерной сфере, достаточно установить следующую лемму:

Лемма. *Пусть V и F — такие подмножества двумерной сферы $\mathbb{S}^2$, что V открыто и непусто, F замкнуто, $V \subset F$ и $F \setminus V$ конечно. Тогда $F = \mathbb{S}^2$.*

◀ Предположим противное: найдется точка $a \in \mathbb{S}^2 \setminus F$. Возьмем произвольную точку $b \in V$. Точки a и b можно соединить на сфере бесконечным множеством путей, попарно не имеющих общих точек, кроме a и b. Каждый из этих путей должен пересекаться с границей ∂V множества V. Таким образом мы получаем бесконечное множество точек в ∂V. Это противоречит тому, что ∂V содержится в конечном множестве $F \setminus V$. ▶

Седьмое доказательство. По-видимому, самое простое доказательство, которое чаще других встречается в учебниках, таково [7, 12].

◀ Пусть, как и раньше, $p(z)$ — многочлен степени $n > 0$. Тогда существует точка $a \in \mathbb{C}$, в которой функция $|p(z)|$ достигает минимума. Действительно, так как $|p(z)|$ стремится к бесконечности при z, стремящемся к бесконечности, то $\inf_{z\in\mathbb{C}} |p(z)| = \inf_{z\in B} |p(z)|$, где B — достаточно большой замкнутый круг. Нижняя грань $\inf_{z\in B} |p(z)|$ достигается в силу компактности круга B.

Предположим, что $p(a) \neq 0$. Заменяя многочлен $p(z)$ на $p(z+a)/p(a)$, мы сводим дело к случаю, когда $p(0) = 1$ и $|p(z)| \geqslant 1$ при всех z. Пусть $p(z) = 1+a_k z^k+\dots+a_n z^n$, где $a_k \neq 0$. Сведем дело к случаю, когда $a_k = -1$. Из каждого комплексного числа можно извлечь корень k-й степени (это следует из записи числа в тригонометрической форме). Пусть c — такое число, что $c^k = -1/a_k$. Заменяя многочлен $p(z)$ на $p(cz) = 1 - z^k + \dots$ $\dots + a_n c^n z^n$, мы можем считать, что $a_k = -1$.

Запишем $p(z)$ в виде $p(z) = 1 - z^k + b(z)$. Когда z стремится к нулю, $|b(z)|$ бесконечно мало по сравнению с $|z^k|$. В частности, если x — достаточно малое положительное число, то $|b(x)| < x^k$. При таких x имеем $|p(x)| = |1 - x^k + b(x)| \leqslant 1 - x^k + |b(x)| < 1$ — противоречие. ▶

Комментарий. Это упрощение основной идеи Даламбера принадлежит швейцарскому математику Аргану (1814). Но и он (в начале прошлого века) не смог бы как следует объяснить, почему задача на минимум имеет решение. Ведь тогда еще не родились Вейерштрасс, Дедекинд и Кантор, которые построили теорию действительного числа.

Отметим, что равенство $p(a) = 0$, где a — точка, в которой $|p(z)|$ достигает минимума, вытекает также из *принципа максимума модуля*. Согласно этому принципу, модуль непостоянной голоморфной функции, определенной в связном открытом множестве, не может достигать максимума. В нашем случае надо применить этот принцип к функции $1/p$. Функция $1/p$ фигурирует и в нашем следующем доказательстве.

Восьмое доказательство [14, 16]. ◀ Предположим, что многочлен $p(z)$ степени > 0 не имеет корней. Тогда функция $1/p$ определена при всех $z \in \mathbb{C}$, голоморфна и стремится к нулю на бесконечности. По теореме Лиувилля эта функция должна быть тождественно равна нулю — противоречие. ▶

Комментарий. Теорема Лиувилля утверждает, что ограниченная голоморфная функция, определенная при всех $z \in \mathbb{C}$, постоянна. Есть и более общая формулировка: ограниченная гармоническая функция, определенная на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, постоянна. Комплексная функция f, определенная в открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$, называется *гармонической*, если она дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению Лапласа $\sum_{i=1}^n \partial^2 f/\partial x_i^2 = 0$. Непрерывная функция f, определенная в U, является гармонической тогда и только тогда, когда для нее выполняется теорема о среднем значении: для любого шара B, содержащегося в U, значение функции f в центре шара равно ее «среднему по шару», т. е. интегралу $\int_B f$, деленному на объем шара. Каждая голоморфная функция является гармонической.

Докажем теорему Лиувилля об ограниченных гармонических функциях, исходя из теоремы о среднем значении. Пусть f — гармоническая функция, определенная на $\mathbb{R}^n$. Допустим, что $|f(x)| \leqslant M$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$, и докажем, что f постоянна. Зафиксируем $a, b \in \mathbb{R}^n$. Пусть A и B — шары одинакового большого радиуса с центрами a и b. Положим $C = A \cap B$. Нетрудно видеть, что отношение $m(A \setminus C)/m(A)$ стремится к нулю, когда радиусы шаров A и B стремятся к бесконечности (через $m(X)$ мы обозначаем объем множества X). Согласно теореме о среднем значении, $f(a) = \int_A f/m(A) = (\int_C f + \int_{A\setminus C} f)/m(A)$. Слагаемое $\int_{A\setminus C} f/m(A) \leqslant m(A \setminus C)M/m(A)$ стремится к нулю с ростом радиуса шара. Следовательно, $f(a)$ равно пределу отношения $\int_C f/m(A)$.

По аналогичным причинам $f(b)$ равно этому же пределу. Таким образом, $f(a) = f(b)$.

Понятие гармонической функции и теорема Лиувилля переносятся на функции со значениями в произвольном банаховом пространстве. Пусть X — комплексное банахово пространство, $B(X)$ — банахово пространство всех ограниченных линейных операторов из X в себя. *Спектром* оператора $A \in B(X)$ называется множество тех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $A - \lambda \cdot 1_X$ необратим. Мы видели в разделе 2, что алгебраическая замкнутость поля $\mathbb{C}$ равносильна следующему свойству: если E — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{C}$ размерности > 0, то всякий линейный оператор $A : E \to E$ имеет непустой спектр. Поэтому следующую теорему, принадлежащую И. М. Гельфанду, можно рассматривать как усиление основной теоремы алгебры: *если X — комплексное банахово пространство, не сводящееся нулю, то всякий оператор $A \in B(X)$ имеет непустой спектр.* Эта теорема вытекает из теоремы Лиувилля. Предположим, что оператор $f(\lambda) = A - \lambda \cdot 1_X$ обратим для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда функция $g : \mathbb{C} \to B(X)$, определенная по формуле $g(\lambda) = f(\lambda)^{-1}$, голоморфна и стремится к нулю на бесконечности. По теореме Лиувилля она должна тождественно равняться нулю — противоречие.

Вернемся к изначальному рассуждению этого пункта, чтобы придать чуть другую форму доказательству.

◀ Пусть по-прежнему p — многочлен степени больше 0, не имеющий корней. Из того, что функция $1/p$ стремится к нулю на бесконечности, вытекает, что

$$\left| \int_{|z|=R} \frac{dz}{zp(z)} \right| \leqslant 2\pi \max_{|z|=R} \frac{1}{p(z)} \underset{R\to\infty}{\to} 0.$$

С другой стороны, функция $1/zp(z)$ имеет единственный полюс в нуле с вычетом $1/p(0)$, и по теореме о вычетах

$$\int_{|z|=R} \frac{dz}{zp(z)} = 2\pi i$$

любого $R > 0$ — противоречие.▶

Идея этого доказательства восходит к Коши.

Девятое доказательство. ◀ Мы показали в разделе 2, что алгебраическая замкнутость поля $\mathbb{C}$ равносильна следующему утверждению: *если E — векторное пространство над $\mathbb{C}$ размерности $n + 1$, то всякий линейный оператор $A : E \to E$ имеет собственный вектор.* Можно предполагать, что оператор A невырожден, так как в противном случае собственные векторы, очевидно, существуют: таковы ненулевые векторы ядра. Пусть $P(E) = \mathbb{C}P^n$ — множество всех одномерных линейных подпространств в E. Это множество называется n-мерным комплексным проективным пространством и имеет естественную структуру компактного гладкого многообразия. Оператор A индуцирует гладкое отображение $\hat{A} : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$. Собственные векторы оператора A соответствуют неподвижным точкам отображения $\hat{A}$. Таким образом, нам надо доказать, что отображение $\hat{A}$ имеет неподвижную точку. Это вытекает из теоремы Лефшеца. ►

Комментарий. *Неподвижная точка* отображения f множества X в себя — это такое $x \in X$, что $f(x) = x$. Теорема Лефшеца утверждает, что отображение $f : X \to X$ компактного полиэдра в себя имеет неподвижную точку, если так называемое *число Лефшеца* $L(f)$ отображения f отлично от нуля [13, 11]. Мы не будем определять это число для произвольного f, а ограничимся случаем, когда f гомотопно тождественному отображению id_X (т. е. f и id_X могут быть соединены непрерывным путем в пространстве $C(X, X)$ отображений X в себя). В этом случае $L(f)$ совпадает с эйлеровой характеристикой пространства X. *Эйлерова характеристика* $\chi(X)$ компактного многообразия X может быть определена следующим образом. Пусть $F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n = X$ — возрастающая последовательность замкнутых подмножеств в X, такая, что каждая разность $F_k \setminus F_{k-1}$ гомеоморфна дизъюнктной сумме конечного числа a_k экземпляров пространства $\mathbb{R}^k$. Мы считаем, что $F_{-1} = \varnothing$, так что F_0 — это конечное множество. Тогда $\chi(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$. Это число не зависит от выбора последовательности $F_0, \ldots, F_n$. Нужный нам вариант теоремы Лефшеца формулируется так: *если X — компактное многообразие ненулевой эйлеровой характеристики, то всякое непрерывное отображение $f : X \to X$, гомотопное тождественному, имеет неподвижную точку.*

Покажем, что эта теорема применима к отображению $\hat{A} : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$, индуцированному невырожденным линейным оператором $A : E \to E$. Эйлерова характеристика комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P^n$ равна $n+1$. Это вытекает из рассмотрения цепочки подпространств $\mathbb{C}P^0 \subset \mathbb{C}P^1 \subset \ldots \mathbb{C}P^n$, в которой каждая разность $\mathbb{C}P^k \setminus \mathbb{C}P^{k-1}$ гомеоморфна $\mathbb{C}^k$. С другой стороны, группа $\mathrm{GL}(E)$ всех обратимых линейных операторов из E в себя связна. Это легко доказать индукцией по размерности пространства E. Можно также рассуждать следующим образом. Пусть $L = L(E, E)$ — линейное пространство всех линейных отображений из E в себя. Группа $\mathrm{GL}(E)$ служит дополнением в L к алгебраическому множеству $D = \{B \in L : \det B = 0\}$. Множество D имеет в L коразмерность 2 и потому не может разбивать L. Более того, для любых двух точек $x, y \in \mathrm{GL}(E) = L \setminus D$ комплексная прямая $l \subset L$, соединяющая x и y, пересекается с D по конечному множеству, поэтому существует ломаная, соединяющая x с y в l и не пересекающаяся с D. Таким образом, в группе $\mathrm{GL}(E)$ существует путь, соединяющий единичный оператор с A. Отсюда следует, что существует путь, соединяющий $\hat{A}$ в пространстве $C(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^n)$ с тождественным отображением, т. е. что отображение $\hat{A}$ гомотопно тождественному.

Проведенное доказательство можно применить в более общей ситуации. Пусть G — связная топологическая группа, H — такая замкнутая подгруппа в G, что факторпространство G/H является компактным многообразием ненулевой эйлеровой характеристики. Тогда каждое $g \in G$ сопряжено с некоторым элементом из H. Действительно, по теореме Лефшеца отображение $xH \mapsto gxH$ пространства G/H в себя имеет неподвижную точку aH. Таким образом, $gaH = aH$, откуда $a^{-1}ga \in H$. Выше мы фактически рассматривали случай, когда $G = \mathrm{GL}(E)$, а H — подгруппа всех преобразований $A \in G$, оставляющих инвариантной некоторую фиксированную прямую в E. В этом случае факторпространство G/H отождествляется с проективным пространством $\mathbb{C}P^n$, где $n = \dim E - 1$. Можно дать еще одно доказательство основной теоремы алгебры, приняв за H подгруппу всех операторов из G, имеющих верхнетреугольные матрицы (т. е. с нулями ниже главной диагонали) относительно некоторого фиксированного базиса в E. В этом случае факторпространство G/H является так называемым «многообразием флагов». Оно компактно и имеет эйлерову характеристику $(n+1)!$. Утверждение, что каждое $g \in G$ сопряжено с некоторым элементом подгруппы H, означает, что каждый оператор $g \in G$ имеет относительно некоторого базиса треугольную матрицу. Это утверждение равносильно основной теореме алгебры.

Укажем еще одно применение сформулированной выше теоремы о топологических группах. Пусть G — связная компактная группа Ли (т. е. топологическая группа, являющаяся гладким многообразием). *Тором* в G называется подгруппа, изоморфная конечной степени группы $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Если T — максимальный тор в G, то эйлерова характеристика пространства G/H равна порядку так называемой *группы Вейля* группы G и, в частности, отлична от нуля. Следовательно, G покрывается подгруппами, сопряженными с T. Отсюда легко вывести, что все максимальные торы в G сопряжены между собой [1].

Десятое доказательство [9]. Наше последнее доказательство будет алгебраическим. Роль топологии при этом сводится к минимуму. Мы используем лишь связность прямой в следующей форме: *если многочлен с вещественными коэффициентами меняет знак (т. е. принимает как положительные, так и отрицательные значения), то он имеет вещественный корень.* Это свойство упорядоченного поля $\mathbb{R}$ называется *вещественной замкнутостью.* Оно равносильно соединению двух свойств: *всякий многочлен нечетной степени имеет корень, и всякое положительное число является квадратом.*

Каждое комплексное число является квадратом. Выше мы уже пользовались более общим фактом: из каждого комплексного числа можно извлечь корень любой целой степени $n > 0$. При этом мы ссылались на запись комплексных чисел в тригонометрической форме. Однако теперь мы хотим дать доказательство, которое годилось бы для всех вещественно замкнутых полей и не использовало бы трансцендентных функций. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$. Нам надо найти такие $x, y \in \mathbb{R}$, что $(x+iy)^2 = a+ib$. Это уравнение равносильно системе уравнений $x^2 - y^2 = a$ и $2xy = b$. Пусть x и y — квадратные корни из положительных чисел $(a + \sqrt{a^2+b^2})/2$ и $(-a+\sqrt{a^2+b^2})/2$. Тогда $x^2 - y^2 = a$ и $x^2y^2 = b^2/4$, откуда $2xy = \pm b$. Если $2xy = -b$, изменим знак у x или y.

Из того, что всякий многочлен из $\mathbb{R}[X]$ нечетной степени имеет корень, вытекает, что у поля $\mathbb{R}$ нет собственных конечных расширений нечетной степени. Из того, что всякое $z \in \mathbb{C}$ является квадратом, вытекает, что у поля $\mathbb{C}$ нет расширений степени 2. Покажем, как вывести отсюда, что поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто. Идея доказательства восходит к Эйлеру. Эта идея была усовершенствована Лагранжа, а затем совершенно безупречно реализована Гауссом в его втором доказательстве (1815 г.) основной теоремы алгебры. Изложение, основанное на симметрических многочленах, можно найти в [7, 5]. Мы приведем доказательство Артина, основанное на теории Галуа и теореме Силова.

◀ Напомним сперва основные факты теории Галуа. Пусть L — конечное расширение поля K. Обозначим через $G(L/K)$ группу всех автоморфизмов f поля L, таких, что $f(x) = x$ для всех $x \in K$. Эта группа конечна. Для каждой подгруппы $H \subset G = G(L/K)$ пусть L_H — неподвижное поле группы H, т. е. множество всех таких $x \in L$, что $f(x) = x$ для всех $f \in H$. Конечное расширение L называется *расширением Галуа*, если $L_G = K$. Пусть L — расширение Галуа поля K. Тогда существует естественное взаимно-однозначное соответствие между множеством $\mathcal{P}$ всех подполей поля L, содержащих K, и множеством $\mathcal{H}$ всех подгрупп группы G. Каждой группе $H \in \mathcal{H}$ сопоставим поле $L_H \in \mathcal{P}$. Каждому полю $P \in \mathcal{P}$ сопоставим группу $G(L/P) \in \mathcal{H}$. Указанные отображения $\mathcal{H} \to \mathcal{P}$ и $\mathcal{P} \to \mathcal{H}$ взаимно обратны. Если H_1, H_2 — подгруппы группы G и $H_1 \subset H_2$, то для полей P_1 и P_2, соответствующих H_1 и H_2, имеем $P_2 \subset P_1$, и степень $[P_1 : P_2]$ равна индексу $(H_2 : H_1)$.

Согласно теореме 1, нам надо установить, что у поля $\mathbb{C}$ нет собственных конечных расширений. Пусть K — конечное расширение поля $\mathbb{C}$. Существует конечное расширение L поля K, такое, что L — расширение Галуа поля $\mathbb{R}$. Рассмотрим группу Галуа $G = G(L/\mathbb{R})$. Так как у поля $\mathbb{R}$ нет собственных расширений нечетной степени, то в группе G нет собственных подгрупп нечетного индекса. Следовательно, силовская 2-подгруппа группы G совпадает с G, т. е. G является 2-группой. Пусть $H = G(L/\mathbb{C})$ — подгруппа индекса 2 в G, соответствующая полю $\mathbb{C}$. Так как у поля $\mathbb{C}$ нет расширений степени 2, то в группе H нет подгрупп индекса 2. Однако в нетривиальной конечной p-группе всегда есть подгруппа индекса p, поэтому H сводится к единице. Отсюда следует, что $L = K = \mathbb{C}$. ▶

Список литературы

[1] *Адамс Дж.* Лекции по группам Ли. М.: Наука. 1979.

[2] *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. М.: Изд-во иностр. литературы. 1963.

[3] *Бурбаки Н.* Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы. М.: Наука. 1965.

[4] *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.: Наука. 1989.

[5] *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. М.: Наука. 1994.

[6] *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? М.: Просвещение. 1967.

[7] *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука. 1971.

[8] Сборник задач московских математических олимпиад /*под ред. А.А. Лемана.* М.: Просвещение. 1965.

[9] *Ленг С.* Алгебра. М.: Мир. 1968.

[10] *Милнор Дж.* Топология с дифференциальной точки зрения // *Милнор Дж., Уоллес А.* Дифференциальная топология. М.: Мир. 1972.

[11] *Понтрягин Л. С.* Основы комбинаторной топологии. М.: Наука. 1976.

[12] *Рудин У.* Основы математического анализа. М.: Мир. 1966.

[13] *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. М.: Мир. 1971.

[14] *Форстер О.* Римановы поверхности. М.: Мир. 1980.

[15] *Фоменко А. Т., Фукс Д. Б.* Курс гомотопической топологии. М.: Наука. 1989.

[16] *Шварц Л.* Анализ. М.: Мир. 1972.

[17] *Янин В. Л.* Предисловие // *Колмогоров А. Н.* Новгородское землевладение XV века. М.: Наука. 1994.

От спектрального радиуса к основной теореме алгебры

Е. А. Горин

В рамках классического функционального анализа можно установить существование собственных векторов для линейных преобразований $\mathbb{C}^n$ в обход основной теоремы алгебры.

Введение

Основная теорема алгебры устанавливает, что каждый нетривиальный полином над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел имеет корень.

Историки математики утверждают, что основную теорему алгебры сформулировал А. Жирар ещё в 30-е годы XVII века. Принято считать, что первое строгое доказательство содержится в знаменитой диссертации К.-Ф. Гаусса 1799 года; не случайно основную теорему алгебры часто называют теоремой Гаусса. Между тем, известно, что в середине XVIII века доказательство основной теоремы алгебры опубликовал Ж. Даламбер, и в современных курсах алгебры обычно приводится доказательство, основанное на «лемме Даламбера», фактически устанавливающей открытость нетривиального полиномиального отображения комплексной плоскости.

Кто-то остроумно заметил, что каждый раздел математики имеет собственное доказательство основной теоремы алгебры. В самом деле, в теории аналитических функций основную теорему алгебры любят выводить из теоремы Лиувилля, в топологии — из общих фактов о вращении векторных полей, а алгебраист может начать с основ теории Галуа. Как бы то ни было, в один из решающих моментов материализуется поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел и привлекаются более или менее деликатные соображения, связанные с analysis situs (так раньше называли топологию).

Естественно спросить, реализуется ли сформулированный выше тезис в рамках элементарного функционального анализа (попросту говоря, —

линейной алгебры, которая не боится предельных переходов). Мы хотим показать, что это так. Приводимое ниже доказательство одного весьма общего утверждения не перегружено алгебраическими изысками, а из топологии использует лишь ограниченность вещественных непрерывных функций на отрезке. В качестве следствия (различными способами) можно получить основную теорему алгебры.

Напомним, что *алгеброй над полем* $\mathbb{C}$ *комплексных чисел* называется комплексное линейное пространство A, в котором дополнительно определено *умножение* $x \cdot y$, связанное с линейными операциями условиями

$$\begin{aligned} x(yz) &= (xy)z, \\ x(y+z) &= xy + xz, \\ (x+y)z &= xz + yz, \\ (\lambda x)y &= \lambda(xy) = x(\lambda y) \end{aligned}$$

для всех $x, y, z \in A$ и $\lambda \in \mathbb{C}$.

Мы будем рассматривать только алгебры с единицей 1 (не используя для единицы алгебры никаких шрифтовых выделений). Элемент $x \in A$ называется обратимым, если существует такой элемент $y \in A$, что $xy = yx = 1$. Такой элемент y, если он существует, однозначно определен по x и обычно обозначается через x^{-1}. Совокупность всех обратимых элементов образует группу (по умножению).

Комплексную алгебру будем называть *нормированной*, если она одновременно является нормированным (линейным) пространством над полем $\mathbb{C}$, причем эти структуры связаны условиями $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ и $\|1\| = 1$.

Существуют другие способы описания такой комбинации структур, но мы не будем здесь это обсуждать, поскольку ничего, кроме определения (в которое как раз и запрятана идеологическая бомба), нам не потребуется.

Введенный класс очень широк, поскольку мы не предполагаем полноты нормированного пространства. Скажем, в качестве A можно взять алгебру $\mathbb{C}[z]$ всех комплексных полиномов, понимая под нормой, например, сумму модулей коэффициентов.

С точки зрения анализа, значительно более интересны *банаховы алгебры*, в определение которых дополнительно включается требование полноты нормированного пространства. Основоположник абстрактной теории банаховых алгебр И. М. Гельфанд называл их нормированными кольцами, но со временем это наименование вышло из употребления.

Полнота не только заметно упрощает формулировки и доказательства, она приводит к классу с чрезвычайно красивой архитектурой и многочисленными плодотворными контактами с другими разделами математики. Вместе с тем, для справедливости некоторых исходных фактов полноты не требуется.

Пусть A — нормированная алгебра и $x \in A$. Совокупность всех таких $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых элемент $\lambda \cdot 1 - x$ *не является* обратимым, называется *спектром* элемента x. Для спектра элемента $x \in A$ используется обозначение $\operatorname{Spec}_A(x)$.

Ясно, что спектр — понятие чисто алгебраическое, однако в случае банаховых алгебр существует тесная связь между спектральными, метрическими и топологическими инвариантами алгебры.

Теперь мы перечислим некоторые исходные факты теории банаховых алгебр. Заметим, что в основном тексте все они будут доказаны (и подчеркнём, что за рамками этого элементарного текста останутся почти все принципиальные понятия теории).

Теорема Гельфанда–Мазура. *Банахово поле состоит из элементов вида $\lambda \cdot 1$ и, следовательно, естественно изоморфно полю комплексных чисел.*

Теорема Гельфанда о непустоте спектра. *Спектр каждого элемента банаховой алгебры не пуст и компактен.*

Формула Гельфанда для спектрального радиуса. *Радиус наименьшего круга с центром в точке 0, содержащего спектр элемента x банаховой алгебры, может быть вычислен по формуле*

$$|x|_\infty = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$$

(предел справа существует).

С. Мазур опубликовал первое из этих утверждений в 1938 г. Вскоре И. М. Гельфанд дал (среди прочего) полное доказательство всех трех. Ясно, что теорема о непустоте спектра покрывает теорему Гельфанда–Мазура. Кроме того, утверждение о непустоте спектра (но не о компактности) сохраняется без предположения о полноте, т. е. для всех нормированных алгебр. Наконец, если *определить* «спектральный радиус» указанной выше формулой Гельфанда, то получится, что на границе круга

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqslant |x|_\infty\}$$

имеются точки спектра независимо от того, полна алгебра или нет.

Хотя доказательства И. М. Гельфанда существенно использовали основные факты теории аналитических функций (теорема Лиувилля, формула Коши–Адамара), последнее обстоятельство наводит на мысль поискать элементарное доказательство теоремы о непустоте спектра для произвольных нормированных алгебр.

Такие доказательства были найдены еще в середине 50-х годов, одно из них принадлежит Ч. Риккарту [3].

Здесь приводится упрощенный вариант этого доказательства. Сначала автор предполагал изложить собственное доказательство, не очень сложное в случае конечномерных алгебр, однако, еще раз обдумав доказательство Риккарта, понял, как его можно упростить, и решил отказаться от собственной песни.

Основная теорема алгебры фактически эквивалентна теореме о непустоте спектра для конечномерных алгебр. Действительно, пусть $M(n,\mathbb{C})$ — алгебра всех комплексных квадратных матриц порядка n. Согласно канонам линейной алгебры, матрица $T \in M(n,\mathbb{C})$ тогда и только тогда обратима, когда $\det(T) \neq 0$. Поэтому утверждение о непустоте спектра для алгебры $M(n,\mathbb{C})$ равносильно утверждению о разрешимости уравнений $\det(\lambda\cdot 1 - T) = 0$, и остается только заметить, что *каждый* полином со старшим коэффициентом, равным, 1 реализуется в виде $\det(\lambda\cdot 1 - T)$ при подходящих n и T. В частности, основная теорема алгебры *вытекает* из теоремы о непустоте спектра.

Наш дальнейший план таков.

В п. 1 мы объясняем, как свести проблему о непустоте спектра к случаю коммутативных алгебр и приводим элементарные алгебраические тождества (которые сохраняют смысл в контексте произвольных коммутативных колец).

В п. 2 приводятся факты, которые относятся к элементарному анализу и позволяют ввести понятие *спектрального индикатора*. Главный пример — спектральный радиус в случае нормированных алгебр, если последний *определять* формулой Гельфанда.

Суммируя это немногое, в п. 3 мы получаем вариант теоремы о непустоте спектра.

В п. 4 мы описываем два способа (один из них вкратце намечен выше) вывести основную теорему алгебры из теоремы о непустоте спектра для конечномерных алгебр (предварительно объясняется, почему для конечномерных алгебр утверждение о непустоте спектра вытекает из общей теоремы).

Наконец, п. 5 содержит небольшое ностальгическое «рассуждение по поводу».

В этом тексте леммы и формулы имеют сплошную нумерацию, а замечания не нумеруются вовсе. В ранг теоремы возведено только одно утверждение.

Я хотел бы поблагодарить В. М. Тихомирова, без благожелательной настойчивости которого эта затея вряд ли была бы доведена до конца, и Н. Б. Васильева, замечания которого побудили меня отказаться от некоторых излишеств первоначального варианта. Я благодарю В. Я. Лина — на сей раз за щедрую TEX-ническую поддержку издалека. Наконец, я признателен М. Н. Вялому, который ухитрился привести мой TEX в пристойный вид.

1. Несколько алгебраических тождеств

В этом пункте, пока не будет оговорено противное, можно считать, что A — произвольное кольцо с единицей 1; это означает просто, что мы не будем использовать в доказательствах умножение на скаляры.

В теореме о непустоте спектра речь идет об обратимости элементов специального вида. Следующее стандартное рассуждение показывает, что (по крайней мере, теоретически) проблема обратимости сводится к рассмотрению коммутативных объектов.

Рассмотрим некоторое непустое подмножество $S \subset A$. *Централизатором* множества S называется множество

$$Z(S) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \in A \;\middle|\; xy = yx \ \text{ для всех } y \in S\right\}.$$

Легко видеть, что $Z(S)$ — кольцо с единицей 1. Далее, если $S_1 \subset S_2$, то $Z(S_2) \subset Z(S_1)$. Отсюда сразу следует

Лемма 1. *Если элементы подмножества S коммутируют между собой (например, если S состоит из одного элемента), то $Z(Z(S))$ — коммутативное подкольцо, и элемент из S тогда и только тогда обратим в A, когда он обратим в $Z(Z(S))$.*

Пусть теперь A — *коммутативное* кольцо с единицей 1. Ясно, что

$$a^{-1} - b^{-1} = -(a-b) \cdot a^{-1} \cdot b^{-1} \tag{1}$$

для всех обратимых элементов $a, b \in A$.

При фиксированном $x \in A$ положим

$$r_a = r_a(x) \stackrel{\text{def}}{=} (a - x)^{-1},$$

если элемент $a - x$ обратим. В предположении, что элементы $a - x$ и $b - x$ оба обратимы, из тождества (1) вытекает тождество

$$r_a - r_b = -(a - b) \cdot r_a \cdot r_b, \tag{2}$$

которое называется *тождеством Гильберта.*

Фиксируем такой набор $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ элементов из A, что

$$z_k^n = 1 \qquad (1 \leqslant k \leqslant n) \tag{3}$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} z_k^m = 0 \qquad (1 \leqslant m < n). \tag{4}$$

Ясно, что все элементы z_k обратимы и что соотношения (4) выполняются при всех m, положительных и отрицательных, кроме кратных n. В частности, если $w_k = z_k^{-1}$, то этот набор также удовлетворяет условиям (3) и (4). Разумеется, основной пример — набор корней n-й степени из 1; в этом случае выполнение соотношений (3) и (4) гарантируется известными формулами Ньютона.

При натуральном n положим

$$\varphi_n(u) \stackrel{\text{def}}{=} 1 + u + u^2 + \cdots + u^{n-1}.$$

Для доказательства следующей леммы достаточно переставить порядок суммирования справа.

Лемма 2 (О корнях из единицы). *Для любых $x, y \in A$ имеет место тождество*

$$n \cdot \sum_{0}^{n-1} x^k \cdot y^{n-k-1} = \sum_{z} z \cdot \varphi_n(zx) \cdot \varphi_n(zy), \tag{5}$$

в котором суммирование справа производится по всем $z = z_k$ из отмеченного набора.

Из тождества (5) при $x = y$ вытекает, что

$$n^2 \cdot x^{n-1} = \sum_{z} z \cdot \varphi_n(zx)^2. \tag{6}$$

Лемма 3. *Предположим, что для всех $z = z_k$ элементы $z - x$ обратимы. Тогда*

$$n^2 \cdot x^{n-1} = (1 - x^n)^2 \cdot \sum_z z \cdot r_z^2. \tag{7}$$

Доказательство. Будем писать w вместо z^{-1}. Поскольку набор $\{w\}$ удовлетворяет тем же соотношениям, что и набор $\{z\}$, из тождества (6) вытекает, что

$$n^2 \cdot x^{n-1} = \sum_w w \cdot \varphi_n(wx)^2.$$

Элементы $1 - wx$ обратимы, причем

$$(1 - wx)^{-1} = z(z - x)^{-1} = zr_z.$$

Так как $(1 - wx)\varphi_n(wx) = 1 - x^n$, то $\varphi_n(wx) = (1 - x^n)zr_z$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} n^2 \cdot x^{n-1} = \sum_w w \cdot \varphi_n(wx)^2 = \\ = (1 - x^n)^2 \cdot \sum_z z \cdot r_z^2, \end{aligned}$$

и лемма доказана.

Если A — алгебра над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, а $z_k = \lambda_k$ — корни из 1, то формула (7) может быть записана в виде

$$n \cdot x^{n-1} = (1 - x^n)^2 \cdot \int_{\mathbb{T}} \lambda \cdot {r_\lambda}^2 \, d\mu_n. \tag{8}$$

Здесь

$$\mathbb{T} \overset{\text{def}}{=} \bigl\{\lambda \in \mathbb{C} \bigm| |\lambda| = 1\bigr\}$$

— единичная окружность, μ_n — мера Хаара группы корней n-й степени из 1, т. е. единичная мера на $\mathbb{T}$, сопоставляющая корню массу $1/n$. Относительно элемента x предполагается, что $\operatorname{Spec}_A(x)$ не пересекается с этой группой.

Как и полагается в данном контексте, при $\lambda \in \mathbb{C}$ через r_λ здесь обозначается *резольвента* элемента $x \in A$, т. е. элемент $(\lambda \cdot 1 - x)^{-1}$, если такой элемент существует. Это обозначение используется и в дальнейшем.

Многие факты элементарной теории аналитических функций вытекают из теоремы о среднем, которая получается из интегральной формулы Коши в применении к центру единичного диска. Конечные усреднения типа (8) довольно часто позволяют обойтись без интегрирования, а то и дополнить результат. Наш сюжет — на эту тему.

2. Спектральный индикатор

Следующая простая, но весьма полезная лемма иногда называется леммой Фекете.

Лемма 4. *Пусть* $\{\alpha_k\}$ *— такая последовательность неотрицательных чисел, что*

$$\alpha_{k+l} \leqslant \alpha_k \cdot \alpha_l \tag{9}$$

для всех натуральных k *и* l. *Тогда*

$$\varlimsup_{k\to\infty} \alpha_k^{1/k} = \inf_k \alpha_k^{1/k} \tag{10}$$

и, в частности, последовательность $\{\alpha_k^{1/k}\}$ *имеет предел.*

Доказательство. Для удобства будем считать, что $\alpha_0 = 1$. Фиксируем натуральное m. Если $k > m$, то $k = ms + r$, где $0 \leqslant r < m$. Поэтому, согласно (9),

$$\alpha_k^{1/k} \leqslant \alpha_r^{1/k} \cdot \alpha_m^{s/k}.$$

При $k \to \infty$ последнее неравенство приводит к равенству (10) с заменой правой части на $\alpha_m^{1/m}$, и теперь остается взять нижнюю грань по m справа. Лемма доказана.

Пусть A — алгебра с единицей 1 над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Неотрицательную функцию p на A будем называть *субнормой*, если выполняются следующие условия:

1. *Невырожденность:* $p(1) > 0$.
2. *Однородность:* $p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x)$ для всех $x, y \in A$ и всех $\lambda \in \mathbb{C}$.
3. *Субаддитивность:* $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ для всех $x, y \in A$.
4. *Субмультипликативность:* $p(xy) \leqslant p(x) \cdot p(y)$ для всех $x, y \in A$.

Неотрицательную функцию σ на A будем называть *спектральным индикатором*, если

1. $\sigma(1) = 1$.
2. $\sigma(x^n) = \sigma(x)^n$ для всех $x \in A$ и натуральных n.
3. Сужение σ на каждую коммутативную подалгебру — субнорма.

Лемма 5. *Пусть* p *— субнорма на алгебре* A. *Тогда для каждого элемента* $x \in A$ *существует предел*

$$\sigma(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} p(x^n)^{1/n},$$

и этот предел σ *— спектральный индикатор.*

Доказательство. Существование предела является следствием предыдущей леммы. Условия невырожденности и однородности очевидны.

Из существования предела вытекает, что $\sigma(x^k) = \sigma(x)^k$. Если $xy = yx$, то из существования предела и аналогичного неравенства для p получается неравенство $\sigma(xy) \leqslant \sigma(x) \cdot \sigma(y)$. Наконец, для доказательства неравенства треугольника надо дополнительно использовать «бином Ньютона».

Замечание. Если A — нормированная алгебра, то спектральный индикатор, порожденный нормой, — это в точности «спектральный радиус», если последний *определять* формулой Гельфанда. Стандартный пример матриц

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

показывает, что спектральный индикатор, порожденный субнормой, вообще говоря, субнормой не является. Этот пример типичен. Вместе с тем, для (некоммутативной) алгебры верхних треугольных матриц второго порядка спектральный индикатор, порожденный стандартной нормой, будет субнормой.

3. Теорема о непустоте спектра

Пусть A — коммутативная алгебра и σ — спектральный индикатор. Согласно определению, σ является субнормой. Заметим, что условие $\sigma(a) < 1$ (в отличие от стандартной ситуации), вообще говоря, *не гарантирует* обратимости элемента $1 - a$. С точностью до этой оговорки следующая лемма тривиальна.

Лемма 6. *Если* $(1 - a) \cdot b = 1$ *и* $\sigma(a) < 1$, *то*

$$\sigma(b) < \frac{1}{1 - \sigma(a)}.$$

Действительно, $b = 1 + ab$, так что

$$\sigma(b) \leqslant 1 + \sigma(a) \cdot \sigma(b).$$

Фиксируем некоторый элемент $x \in A$. Предположим, что множество $\mathbb{C} \backslash \mathrm{Spec}_A(x)$ не пусто. Это множество называется множеством регулярных точек элемента x и является областью определения резольвенты

$$r_\lambda = (\lambda \cdot 1 - x)^{-1}.$$

Лемма 7. *Функция $\lambda \to \sigma(r_\lambda)$ непрерывна на множестве регулярных точек элемента x и, следовательно, равномерно ограничена на каждом компактном подмножестве этого множества.*

Доказательство. Если λ, μ — регулярные точки, то, согласно тождеству Гильберта,

$$r_\mu = (1 - (\mu - \lambda) r_\lambda)^{-1} \cdot r_\lambda.$$

Поэтому, если $|\mu - \lambda|\, \sigma(r_\lambda) < 1$, то, используя еще раз тождество Гильберта и, кроме того, лемму 6, получаем

$$\begin{aligned} \bigl|\sigma(r_\mu) - \sigma(r_\lambda)\bigr| &\leqslant \sigma(r_\mu - r_\lambda) = \\ &= \bigl|\mu - \lambda\bigr| \cdot \sigma(r_\mu \cdot r_\lambda) \leqslant \\ &\leqslant \frac{|\mu - \lambda|\, \sigma(r_\lambda)^2}{1 - |\mu - \lambda|\, \sigma(r_\lambda)}, \end{aligned}$$

и доказательство закончено.

Напомним, что через $\mathbb{T}$ мы обозначаем стандартную единичную окружность на комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Теорема. *Пусть A — комплексная алгебра с единицей. Предположим, что на A существует спектральный индикатор σ.*

Тогда $\operatorname{Spec}_A(x) \neq \varnothing$ для всех $x \in A$. В частности, спектр каждого элемента не пуст, если алгебра обладает субнормой.

Доказательство. По лемме 1, мы можем предположить, что алгебра A коммутативна. Пусть $x \in A$. Если $\sigma(x) = 0$, то x не может быть обратимым, так что $0 \in \operatorname{Spec}_A(x)$.

Поэтому мы можем считать, что $\sigma(x) = 1$. Покажем, что в этом случае на окружности $\mathbb{T}$ имеется хотя бы одна точка спектра элемента x. Действительно, в противном случае все точки окружности $\mathbb{T}$ будут точками регулярности. По лемме 7, найдется такое $c > 0$, что для всех $\lambda \in \mathbb{T}$ будет выполняться неравенство $\sigma(r_\lambda) \leqslant c$. Но так как $\sigma(x) = 1$, то это сразу приводит к противоречию с леммой 3.

По лемме 5, второе утверждение теоремы является следствием первого. Теорема доказана.

Замечание. Для банаховых алгебр теорема Гельфанда устанавливает больше — спектр не пуст и компактен. Однако в условиях доказанной теоремы спектр не обязательно замкнут или ограничен. Вместе с тем, эту теорему можно редуцировать к теореме Гельфанда: каждая коммутативная алгебра со спектральным индикатором имеет нетривиальный гомоморфизм в банахову, тогда как никакая алгебра, в которой есть элементы с пустым спектром, не может иметь нетривиальных гомоморфизмов в алгебру без таких элементов (имеются в виду гомоморфизмы, «сохраняющие единицу»). Впрочем, и добавления, которые надо сделать, чтобы вывести из установленной теоремы названные выше теоремы Гельфанда, не велики. Действительно, если A — банахова алгебра и $|x|_\infty < 1$, то ряд Неймана

$$y = 1 + x + x^2 + \dots$$

сходится и $(1-x)y = y(1-x) = 1$. Вместе с приведенными выше неравенствами это позволяет установить, что группа обратимых элементов алгебры A открыта в A и что групповые операции в ней непрерывны. Отсюда следует, что дополнение к спектру каждого элемента открыто. Кроме того, используя еще раз ряд Неймана, легко проверить, что элемент $\lambda \cdot 1 - x$ обратим, если $|\lambda| > |x|_\infty$.

4. ...и основная теорема алгебры

Основная теорема алгебры выводится из теоремы о непустоте спектра для конечномерных алгебр. Разумеется, мы должны убедиться, что к таким алгебрам теорема о непустоте спектра применима. Для этого достаточно установить существование нетривиальной субнормы на каждой конечномерной алгебре (фактически все такие алгебры наделяются структурой банаховой алгебры).

Мы начнем с рассмотрения примера, в котором всё достаточно очевидно, однако вскоре выяснится, что общий случай сводится к этому.

Снабдим $\mathbb{C}^n$ стандартной евклидовой нормой; норму вектора $\xi \in \mathbb{C}^n$ будем обозначать через $|\xi|$. Пусть $B = B(\mathbb{C}^n)$ — алгебра всех линейных операторов $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Эта алгебра естественно изоморфна алгебре $M(n, \mathbb{C})$ квадратных матриц порядка n. Все операторы $T \in B$ непрерывны, и легко убедиться, что все они имеют конечную *норму*

$$\|T\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{|\xi|=1} |T\xi|\,,$$

и, снабженная этой нормой, B становится банаховой алгеброй. Мы не привели здесь подробных доказательств, потому что все они проводятся «непосредственно».

Для одного из вариантов доказательства основной теоремы алгебры (см. ниже) достаточно нормируемости алгебры B. Однако для полноты картины (и для большей свободы действий), мы поясним, как можно нормировать произвольную конечномерную алгебру A (с единицей).

Пусть $\dim(A) = n$. Тогда в качестве линейного пространства алгебра A изоморфна $\mathbb{C}^n$. Сопоставим элементу $a \in A$ оператор $T_a : x \to xa$. Используя указанный изоморфизм, мы можем «перенести» эти операторы в алгебру $B = B(\mathbb{C}^n)$; в результате получится точное представление алгебры A в B, и A наделяется нормой.

Прежде чем переходить к доказательствам основной теоремы алгебры, сделаем еще несколько замечаний общего характера.

В пространстве $\mathbb{C}^n$ мы (молчаливо) зафиксировали базис, в результате чего и возник изоморфизм между $B = B(\mathbb{C}^n)$ и $M(n, \mathbb{C})$. Отождествляя оператор $T \in B$ с соответствующей матрицей, мы можем писать выражения вроде $\det(T)$; на самом деле это число от выбора базиса не зависит.

В соответствии с правилами линейной алгебры, оператор T тогда и только тогда будет обратимым, когда $\det(T) \neq 0$. Следовательно, $\mathrm{Spec}_B(T)$ составляют корни (характеристического) уравнения

$$\det(\lambda \cdot 1 - T) = 0.$$

Согласно тем же правилам, эти корни — «собственные значения линейного преобразования», и, как известно, стандартный метод доказательства существования собственных значений использует разрешимость характеристического уравнения.

У нас есть возможность обратить этот путь. Действительно, из сказанного выше по поводу алгебры $B = B(\mathbb{C}^n)$ вытекает, что к этой алгебре применима теорема о непустоте спектра.

Таким образом, спектр каждого оператора $T \in B$ не пуст, у оператора есть собственные числа, а характеристическое уравнение имеет корни.

Чтобы вывести отсюда основную теорему алгебры, остается заметить, что *каждый* полином

$$f(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$$

является характеристическим для некоторого линейного оператора. Например, при $n = 4$ достаточно рассмотреть матрицу

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \alpha_4 \\ -1 & \lambda & 0 & \alpha_3 \\ 0 & -1 & \lambda & \alpha_2 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda + \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Теперь мы хотим вкратце описать ещё один способ получить основную теорему алгебры из теоремы о непустоте спектра.

Обозначим через $\mathbb{C}[z]$ алгебру всех комплексных полиномов. Хорошо известно, что полиномы можно делить с остатком. Это означает, что если $f, g \in \mathbb{C}[z]$, то существуют такие однозначно определенные полиномы h и q, что $g = fh + q$, причем $\deg(q) < \deg(f)$ (полиному, тождественно равному 0, приписывается степень $-\infty$).

Фиксируем некоторый нетривиальный полином f и обозначим через (f) совокупность всех полиномов, делящихся на f без остатка. Множество (f) составляет *идеал* в том смысле, что (f) есть подалгебра (без единицы) с дополнительным свойством: если $g \in (f)$, то $gh \in (f)$, для каждого полинома $h \in \mathbb{C}[z]$.

Говорят, что полиномы g_1, g_2 эквивалентны (точнее, *сравнимы по модулю* (f)), если $g_1 - g_2 \in (f)$.

Возникающие классы эквивалентности составляют алгебру относительно естественных операций, которая обычно обозначается $\mathbb{C}[z]/(f)$.

Из описанной выше процедуры деления с остатком легко вытекает, что размерность этой алгебры равна $\deg(f)$. Повторное применение процедуры деления с остатком (алгоритм Евклида) позволяет установить, что $\mathbb{C}[z]/(f)$ — поле, если полином f неприводим, т. е. не представляется в виде нетривиального произведения полиномов.

По теореме Гельфанда — Мазура, возникающее поле одномерно. Следовательно, если f неприводим, то $\deg(f) = 1$, и основная теорема алгебры ещё раз доказана.

В курсе коммутативной алгебры второй способ может оказаться более предпочтительным: во-первых, привлекаются полезные дополнительные общие понятия, а во-вторых, не надо выходить за рамки коммутативных объектов.

5. Небольшое послесловие

Конкретные алгебры операторов в гильбертовом пространстве начали рассматривать ещё в начале 30-х годов. В частности, исследования фон Неймана по математическим основам квантовой механики — это теория самосопряженных операторов гильбертова пространства.

Вскоре после того как прояснились основные принципы теории банаховых пространств, рядом авторов было введено (под разными названиями) и понятие банаховой алгебры, однако новым направлением в математике, настоящей теорией, связавшей многочисленные разрозненные факты классического и комплексного анализа, алгебры и топологии, эта наука стала благодаря решающему вкладу И. М. Гельфанда. Характерная особенность творчества И. М. Гельфанда проявилась здесь очень ярко: он услышал ключевое слово. В общей коммутативной алгебре, главной моделью которой служит теория чисел, центральное понятие, являющееся естественным обобщением понятия простого числа, — простой идеал. Открытие И. М. Гельфанда состояло в том, что для «коммутативных колец», естественно возникающих в различных задачах анализа, решающую роль играет понятие *максимального* идеала. В этом смысле перечисленные выше результаты — это всего лишь подъездные пути к строительству. В упомянутой выше монографии Ч. Риккарта [3] дана, в частности, практически полная библиография по банаховым алгебрам к началу 60-х годов. К настоящему времени составить подобный список не представляется возможным. С основами теории теперь можно познакомиться практически по любому более или менее современному курсу функционального анализа (см., например, Рудин [4]). Есть, однако, особая прелесть в прикосновении к классическим источникам. Мне в своё время повезло: сначала (по случайным обстоятельствам) я прочел основную работу И. М. Гельфанда [1], затем, просидев месяц в библиотеке мехмата, купил в киоске на Моховой номер «Успехов» со статьей И. М. Гельфанда, Д. А. Райкова и Г. Е. Шилова [2]. Этот экземпляр дожидался своего часа около 10 лет.

Список литературы

[1] *Gelfand I.* Normierte Ringe // Мат. сб. 9 (51):1, 1941. С. 3–23.

[2] *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца // УМН. I, 2(12), 1946. С. 48–146.

[3] *Rickart C. E.* General Theory of Banach Algebras. Princeton, N.J.: D. van Nostrand. 1960.

[4] *Rudin W.* Functional Analysis. N. Y.: McGraw-Hill. 1973.
Рудин У. Функциональный анализ / пер. с англ. В. Я. Лина под ред. Е. А. Горина. М.: Мир. 1975.

«Вещественное» доказательство основной теоремы алгебры

А. В. Пухликов

Цель настоящей заметки — доказать теорему об алгебраической замкнутости поля комплексных чисел $\mathbb{C}$, не используя (даже неявно) само понятие комплексного числа. Хорошо известно, что эта теорема эквивалентна следующему, чисто вещественному факту.

Теорема. *Любой вещественный многочлен*

$$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \qquad a_i \in \mathbb{R},$$

$a_i \in \mathbb{R}$, раскладывается в произведение линейных и квадратичных (вещественных) сомножителей:

$$p(x) = \prod (x - \alpha_i) \cdot \prod (x^2 + p_j x + q_j),$$

где $\alpha_i, p_j, q_i \in \mathbb{R}$.

Уже сама эта формулировка позволяет предположить, что доказательство может быть получено средствами вещественного анализа. Это мы и собираемся сделать. Доказательство мы представим в виде серии утверждений-задач, детальная проверка которых оставлена читателю.

Отметим по ходу дела, что значительная часть известных доказательств опирается на следующий простой факт.

Упражнение 1. *Любой (вещественный) многочлен нечетной степени имеет вещественный корень.*

Указание. Воспользуйтесь теоремой о промежуточном значении.

Приводимое ниже доказательство никак *не* связано с четностью степени.

Будем рассуждать индукцией по степени n многочлена p. Для $n = 1, 2$ теорема тривиальна. Считаем поэтому, что $n \geqslant 3$ и для меньших степеней утверждение теоремы справедливо.

Рассмотрим теперь k-мерное аффинное пространство P_k всех (вещественных) многочленов степени k:

$$P_k \ni g = x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k.$$

Для удобства всегда полагаем $a_0 = 1$. Коэффициенты a_i задают отождествление

$$P_k \cong \mathbb{R}^k,$$
$$P_k \ni g \mapsto (a_1, \ldots, a_k),$$

так что набор коэффициентов $(a_1, \ldots, a_k)$ мы можем (и будем) рассматривать как естественную систему координат на P_k.

В основе нашего доказательства лежит анализ *отображения умножения*

$$\mu_k \colon P_k \times P_{n-k} \to P_n,$$
$$\mu_k : (g, h) \mapsto gh,$$

сопоставляющего паре многочленов их произведение. Достаточно показать, что пространство P_n покрывается образами Z_k отображений μ_k, $k = 1, \ldots, n-1$, ибо в этом случае можно применить предположение индукции. Итак, положим

$$Z = \bigcup_{k=1}^{n-1} Z_k.$$

Задача 1. *Подмножество $Z \subset P_n$ есть в точности множество всех многочленов степени n, удовлетворяющих утверждению теоремы.*

(Это почти тривиально.)

Нам нужно показать, что $Z = P_n$.

Определение. *Непрерывное отображение называется* собственным, *если прообраз любого компакта есть компакт.*

Упражнение 2. *Проверьте, что соответствие $x \mapsto \sin x$ задает отображение $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,* не *являющееся собственным.*

Задача 2. *Отображения умножения μ_k являются собственными.*

Указание. Достаточно показать (почему?), что прообраз любого ограниченного множества относительно μ_k есть ограниченное множество в $P_k \times P_{n-k} \cong \mathbb{R}^n$. Предположим, что это не так. Тогда существуют две последовательности многочленов

$$g_m = a_{m,0}x^k + a_{m,1}x^{k-1} + \dots + a_{m,k}$$

и

$$h_m = b_{m,0}x^{n-k} + b_{m,1}x^{n-k-1} + \dots + b_{m,n-k},$$

$a_{m,0} = b_{m,0} = 1$, такие, что

1) $t_m = \max\limits_{i,j}\{|a_{m,i}|, |b_{m,j}|\} \to \infty$ при $m \to \infty$,

2) коэффициенты многочленов (g_m, h_m) ограничены по модулю константой, не зависящей от m.

Покажите, что, переходя к подпоследовательности, мы можем добиться выполнения следующих свойств «регулярности» поведения коэффициентов:

1) для некоторых индексов s и r ($0 \leqslant s \leqslant k$, $0 \leqslant r \leqslant n-k$) абсолютные значения $|a_{m,r}|$ и $|b_{m,s}|$ максимальны для всех m среди $|a_{m,i}|$ и $|b_{m,j}|$ соответственно, причем обе последовательности $|a_{m,r}|$ и $|b_{m,s}|$ не убывают;

2) для любого индекса i или j ($0 \leqslant i \leqslant k$, $0 \leqslant j \leqslant n-k$) выполнено в точности одно из двух требований: либо $|a_{m,r}| = O(|a_{m,i}|)$ (соответственно, $|b_{m,s}| = O(|b_{m,j}|)$), в этом случае назовем этот индекс (i или j) *большим*, либо $|a_{m,i}| = o(|a_{m,r}|)$ (соответственно, $|b_{m,j}| = o(|b_{m,s}|)$), и в этом случае назовем этот индекс (i или j) *малым*.

Теперь возьмите два наименьших больших индекса $u \leqslant r$ и $v \leqslant s$. Докажите, что последовательность коэффициентов при x^{n-u-v} в многочленах $g_m h_m$ не может быть ограниченной! Это противоречие завершит доказательство.

Задача 3. *Множества Z_k (и, следовательно, Z) замкнуты в P_n.*

Это следствие собственности отображений умножения. Именно поэтому свойство отображения быть собственным является столь важным.

Итак, Z — замкнутое множество. Хотелось бы, чтобы оно одновременно и открытым: тогда можно было бы воспользоваться связностью $P_n \cong \mathbb{R}^n$ и получить желаемое совпадение $Z = P_n$. Мы установим чуть более слабый факт.

Пусть $f \in Z_k$ — некоторый разложимый многочлен,

$$f = gh,$$
$$g = x^k + b_1 x^{k-1} + \dots + b_k,$$
$$h = x^{n-k} + c_1 x^{n-k-1} + \dots + c_{n-k}.$$

Упражнение 3. *Выпишите явно матрицу дифференциала (якобиан) отображения*

$$\mu_k : P_k \times P_{n-k} \cong \mathbb{R}^n \to P_n \cong \mathbb{R}^n$$

в точке $(g,h) \in P_k \times P_{n-k}$ относительно естественных систем координат — коэффициентов многочленов.

Задача 4. *Докажите, что это линейное отображение $d\mu_k$ невырождено (не имеет ядра) тогда и только тогда, когда многочлены g, h взаимно просты.*

Указание. Фиксируя произвольный многочлен $q \in P_m$, мы превращаем *аффинное* пространство P_m в линейное пространство, записывая произвольный многочлен в виде суммы $q+w$, где w — многочлен степени не превосходящей $m-1$. *Линейное* пространство многочленов степени, не превосходящей l обозначим через $\mathcal{P}_l$. Отображение μ_k может быть теперь записано так:

$$(g+u, h+v) \mapsto gh + (gv + hu) + uv.$$

Получаем следующий вид якобиана $d\mu_k$:

$$\mathbb{R}^n \cong \mathcal{P}_{k-1} \times \mathcal{P}_{n-k-1} \ni (u,v) \mapsto gv + hu \in \mathcal{P}_{n-1} \cong \mathbb{R}^n.$$

Отсюда утверждение задачи выводится без труда.

Отметим, что задача 4 и упражнение 3 суть классическая теория *результанта* двух многочленов: определитель якобиевой матрицы $d\mu_k$ есть не что иное как результант $R(g,h)$ многочленов g и h.

Задача 5. *Пусть $f \in Z$ допускает представление $f = gh$, $(g,h) = 1$. Тогда Z содержит некоторую окрестность точки f.*

Указание. Примените теорему о неявной функции.

Задача 6. *Пусть $f \in Z$ не допускает представления $f = gh$, $(g,h) = 1$. Тогда либо $f = (x-a)^n$; либо n четно, $n = 2l$, и $f = (x^2 + bx + c)^l$.*

Пусть $Y \subset P_n$ — (замкнутое) множество многочленов, описанных в предыдущей задаче.

Задача 7. $P_n \setminus Y$ *связно.*

Указание. Открытое множество $P_n \setminus Y$ *линейно* связно: постройте явно путь, связывающий две точки.

Итак, мы знаем, что $Z \setminus Y$ открыто в $P_n \setminus Y$ (задача 5) и замкнуто в $P_n \setminus Y$ (задача 3). В силу предыдущей задачи (и непустоты $Z \setminus Y$!) имеем

$$Z \setminus Y = P_n \setminus Y.$$

Стало быть, $Z = P_n$.

Теорема доказана.

Автор благодарен А. И. Кострикину и А. Г. Хованскому за интерес к этому доказательству, а также А. Б. Сосинскому за полезные замечания и предложения по улучшению изложения.

О некоторых топологических доказательствах основной теоремы алгебры

П. Е. Пушкарь*

Введение

Основная теорема алгебры утверждает, что в поле комплексных чисел любое алгебраическое уравнение имеет корень. Эквивалентная вещественная формулировка: любой вещественный полином раскладывается в произведение линейных и квадратичных сомножителей — может быть доказана без использования понятия комплексного числа (см., например, доказательство А. В. Пухликова [1]). В настоящей заметке мы обсуждаем топологические факты, лежащие в основе доказательства А. В. Пухликова и некоторых других доказательств основной теоремы алгебры, и предлагаем другое доказательство основной теоремы алгебры, также не использующее понятие комплексного числа (основанное на понятии степени отображения).

Приведенное в статье доказательство основной теоремы алгебры появилось в результате обдумывания доказательства А. В. Пухликова, которое было разбито на задачи, предложенные студентам второго курса МК НМУ на семинарах по математическому анализу.

Автор благодарен А. Г. Хованскому за помощь и внимание к этой заметке.

1. О топологических фактах лежащих в основе «вещественного» доказательства основной теоремы алгебры.

Сформулируем необходимые определения.

Напомним, что непрерывное отображение называется собственным, если прообраз любого компакта — компакт.

*Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (проект 96–01–01104) и грантом INTAS–94–4373.

Пусть M^{n+k}, M^n — гладкие многообразия размерности $n+k$ и n соответственно $(k \geqslant 0), f : M^{n+k} \to M^n$ — гладкое отображение.

Точку образа отображения f назовем сильно регулярным значением, если среди ее прообразов найдется точка, дифференциал отображения f в которой имеет максимальный ранг (равный n).

Точку образа отображения f будем называть сильно особым значением, если во всех ее прообразах ранг дифференциала не максимальный (меньше n).

Таким образом, мы разбили образ отображения f на два множества — множество сильно регулярных значений отображения f и множество сильно особых значений отображения f.

Упражнение. *Каким может быть множество сильно особых значений отображения $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$?*

Сформулируем основной топологический факт, лежащий в основе приведенных ниже доказательств основной теоремы алгебры.

Теорема 1. *Пусть $f : M^{n+k} \to M^n$ такое гладкое собственное отображение, что:*
а) дополнение до множества сильно особых значений отображения f связно,
б) множество сильно регулярных значений отображения f непусто.

Тогда образ отображения f совпадает с многообразием M^n.

Доказательство. Докажем, что множество сильно регулярных значений открыто и замкнуто в дополнении к множеству сильно особых значений.

1. Множество сильно регулярных значений открыто в M^n.

Это очевидное следствие из теоремы о неявной функции. Следовательно, это множество открыто и в подмножестве M^n — дополнении до множества сильно особых значений отображения f.

2. Множество сильно регулярных значений замкнуто в дополнении к множеству сильно особых значений.

Рассмотрим последовательность сильно регулярных значений (x_i) сходящуюся к точке a, не лежащей в множестве сильно особых значений отображения f. Объединение членов последовательности (x_i) и точки a — компакт в M^n. Так как отображение f собственно, его прообраз — компакт в M^{n+k}. Выберем по прообразу y_i точки x_i. У последовательности (y_i) есть сходящаяся подпоследовательность (здесь, собственно, и используется собственность отображения f), сходящаяся к точке z. Отображение f непрерывно, следовательно $f(z) = a$.

Таким образом, a лежит в образе f и не принадлежит множеству сильно особых значений отображения f. Следовательно a сильно регулярное значение отображения f. Утверждение о замкнутости доказано.

В силу условий теоремы 1 и доказанных утверждений множество сильно регулярных значений открыто, замкнуто и не пусто в дополнении до множества сильно особых значений отображения f.

Поскольку дополнение связно, то оно совпадает с множеством сильно регулярных значений отображения f. Теорема доказана.

Докажем при помощи теоремы 1 основную теорему алгебры.

1. *«Комплексное» доказательство основной теоремы алгебры.*

Рассмотрим отображение $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$.

Отображение f — собственно. Это следует из хорошо известной оценки абсолютной величины корней уравнения через коэффициенты уравнения (см. [2]). Множество сильно особых значений отображения f конечно, так как сильно особых значений не больше чем корней производной. Множество сильно регулярных значений, очевидно, не пусто.

Следовательно, $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ и теорема доказана.

2. Обсудим вещественное доказательство основной теоремы алгебры — доказательство А. В. Пухликова.

Сформулируем следующее утверждение:

Утверждение 1. *Любой вещественный полином степени $n \geqslant 3$ представим в виде произведения двух полиномов меньшей степени.*

План доказательства: Отождествим полиномы степени i со старшим коэффициентом равным единице с $\mathbb{R}^i$ (отождествляем полином с его коэффициентами).

Рассмотрим отображение умножения $\mu_i : \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^{n-i} \to \mathbb{R}^n, (f,g) \to f \cdot g$.

Определим отображение $\mu : \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^{n-i} \to \mathbb{R}^n$ как отображение, совпадающее на каждой компоненте с соответствующим отображением умножения μ_i.

Нам необходимо показать, что это отображение «на». Мы хотим воспользоваться теоремой 1.

Во-первых, для этого необходимо описать множество сильно особых значений отображения μ.

Замечательный факт состоит в том, что дифференциал отображения μ_i в точке (f, g) невырожден, если и только если наибольший общий делитель полиномов f и g равен 1 (см. [1]). Это позволяет описать множество сильно особых значений отображения μ.

При нечетном n множество сильно особых значений отображения μ совпадает с полиномами вида $(x+a)^n$, а при четном n содержится в множестве полиномов вида $(x^2+ax+b)^{n/2}$. Дополнение до этих множеств связно (поучительное упражнение).

Во-вторых, нужно проверить, что отображение μ — собственное (см. [1] и доказательство собственности подобного отображения в доказательстве теоремы 2 ниже).

Таким образом, мы можем применить теорему 1, что доказывает утверждение 1.

Неформальное замечание. Возможность применения теоремы 1 в вещественной ситуации, в части касающейся связности дополнения до множества сильно особых значений отображения, вызывает некоторое удивление.

Так, множество особых значений для отображения общего положения одного многообразия в другое — гиперповерхность (с особенностями) (см. [4]) и, следовательно, может делить образ. Все дело в том, что множество сильно особых значений может быть существенно меньше (в смысле размерности), чем множество особых значений, а «на сколько меньше по размерности» — зависит от числа «листов» отображения. В комплексной же ситуации гиперповерхность не делит пространство и возможность применения теоремы 1 не вызывает вопросов.

2. О некоторых доказательствах основной теоремы алгебры, основанных на понятии степени отображения.

В этом параграфе мы обсудим комплексное и вещественное доказательства основной теоремы алгебры, основанные на следующем топологическом факте:

Утверждение 2. *Пусть M^n, N^n — гладкие связные ориентированные многообразия, $f : M^n \to N^n$ гладкое собственное отображение, степень которого не равна нулю.*

Тогда f — отображение «на» ($f(M^n) = N^n$).

Напомним, что для гладких собственных отображений ориентированных многообразий степень определяется обычным образом: нужно взять регулярную точку в образе и подсчитать число ее прообразов с учетом знака определителя дифференциала отображения (см. подробности в [3]). То, что степень определена корректно — довольно сложно доказываемая (в отличие от теоремы 1) теорема. Утверждение 2 — очевидно (по модулю корректности определения степени) и общеизвестно.

Выведем из утверждения 2 основную теорему алгебры.

Доказательство([3]): Рассмотрим отображение $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, где $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$. Отображение f — собственно. Степень отображения f равна n, так как f собственно гомотопно отображению $z \to z^n$, степень которого легко вычисляется. Таким образом, мы находимся в рамках утверждения 2. Основная теорема алгебры доказана.

Докажем теперь основную теорему алгебры в следующей эквивалентной «вещественной» формулировке

Теорема 2. *Любой вещественный полином степени $2n$ раскладывается в произведение n полиномов второй степени.*

Доказательство. Отождествим полином $x^2 + ax + b$ с точкой (a, b) плоскости $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим отображение умножения

$$u : (\mathbb{R}^2)^n \to \mathbb{R}^{2n} \qquad (f_1, f_2, \dots, f_n) \mapsto f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n.$$

Мы хотим доказать, что u — отображение «на».

1. Отображение u собственно.

Отождествим пространство отличных от нуля полиномов второй степени по модулю умножения на отличные от нуля числа с проективной плоскостью $\mathbb{R}P^2$. Рассмотрим отображение умножения

$$\hat{u} : (\mathbb{R}P^2)^n \to \mathbb{R}P^{2n}, \quad ([f_1], \dots, [f_n]) \mapsto [f_1 \cdot \dots \cdot f_n].$$

Отображение $\hat{u}$ собственно, так как оно определено на компактном многообразии и непрерывно.

Отображение $\hat{u}$ естественно «компактифицирует» отображение u. $(\mathbb{R}P^2)^n$ можно представить в виде объединения $\mathbb{R}^{2n}$ и «бесконечно удаленной части» B_1, а $\mathbb{R}P^{2n}$ можно представить в виде объединения $\mathbb{R}^{2n}$ и «бесконечно удаленной части» B_2. При этом на $(\mathbb{R}^2)^n$ $\hat{u}$ совпадает с u и, очевидно, $\hat{u}(B_1) \subset B_2$.

Следовательно, умножение u собственно, так как прообраз компакта при отображении u совпадает с прообразом компакта при отображении $\hat{u}$.

2. Степень отображения u по модулю равна $n!$.

Ориентируем пространство полиномов второй степени со старшим коэффициентом 1 (мы обозначаем это пространство через $\mathbb{R}^2$) как-нибудь, а $(\mathbb{R}^2)^n$ ориентируем как произведение ориентированных многообразий.

Лемма. *Полином* $p = \prod_{i=1}^{n}(x^2 + i)$ — *регулярное значение отображения* u.

Упражнение. Докажите лемму.

Указание: Воспользуйтесь описанием регулярных точек отображения μ_i из плана доказательства утверждения 1.

У полинома p есть $n!$ прообразов — все упорядоченные наборы полиномов $(x^2 + i), i = 1, \ldots, n$. Докажем, что они вносят в степень один знак.

Отображение умножения u инвариантно относительно перестановок сомножителей. Отображение перестановки сомножителей сохраняет ориентацию (упражнение), следовательно знак определителя дифференциала во всех прообразах совпадает.

Применяя утверждение 2 к отображению u, заканчиваем доказательство теоремы.

Список литературы

[1] *Пухликов А. В.* «Вещественное» доказательство основной теоремы алгебры. — Статья в этом номере.

[2] *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. — М.: Наука. 1975.

[3] *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука. 1979.

[4] *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. — М.: Наука, 1982.

По-новому о старом: фрагменты классической математики

Физическое доказательство теоремы Уитни о плоских кривых

С. Ю. Оревков

Часто физические соображения помогают решить математическую задачу, сформулированную чисто абстрактно, и, на первый взгляд, далекую от физики. При этом иногда физические рассуждения только позволяют угадать ответ, но иногда их нетрудно довести и до строгого математического доказательства.

Приведем известный пример из элементарной стереометрии.

Задача. *Дан выпуклый многогранник и точка внутри его. Докажите, что всегда найдется такая грань, что основание перпендикуляра, опущенного на нее из данной точки, попадает внутрь этой грани.*

Решение. Положим многогранник на горизонтальную плоскость и распределим в нем массу так, чтобы центр тяжести совпал с данной точкой. Тогда многогранник покатится и будет катиться до тех пор, пока вертикальная проекция центра тяжести не попадет внутрь той грани, на которой многогранник лежит. Поскольку многогранник бесконечно долго катиться не может, это рано или поздно произойдет.

В настоящей статье показано, как из физических соображений получается доказательство одной топологической теоремы.

Рассмотрим гладкие замкнутые кривые на плоскости, возможно, с самопересечениями, т. е. кривые, параметризованные дифференцируемыми отображениями окружности $\mathbb{S}^1$ в плоскость $\mathbb{R}^2$, со всюду ненулевым вектором скорости (такие отображения называются *погружениями*). Погружение окружности в плоскость задается парой дифференцируемых периодических функций с одинаковыми периодами, производные которых нигде одновременно не обращаются в нуль.

Когда две такие кривые можно непрерывно продеформировать одну в другую так, чтобы в процессе деформации мы в каждый момент времени имели бы кривую из того же класса? (Такие деформации называются *регулярными гомотопиями*.)

Для погружения $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ определим его *число вращения* $N(f)$ как взятое со знаком количество оборотов, которое вектор скорости $\dot{f}(t)$ делает вокруг начала координат, в то время как t один раз пробегает окружность в положительном направлении. Другими словами, $N(f)$ есть образ гомотопического класса отображения $\dot{f} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ при изоморфизме $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \to \mathbb{Z}$.

Очевидно, что число вращения не меняется при регулярной гомотопии. Таким образом, необходимое условие регулярной гомотопности двух погружений — совпадение их чисел вращения. Оказывается, это условие является и достаточным.

Теорема (Уитни). *Два погружения f и g окружности $\mathbb{S}^1$ в плоскость $\mathbb{R}^2$ регулярно гомотопны тогда и только тогда, когда их числа вращения совпадают: $N(f) = N(g)$.*

Легко видеть, что любое целое число n реализуется как число вращения для некоторого погружения. Если $n \neq 0$, то это просто окружность, пройденная $|n|$ раз в ту или другую сторону в зависимости от знака n. Если $n = 0$, то это «восьмерка». Таким образом, функция N задает взаимно-однозначное соответствие между множеством классов регулярно гомотопных погружений окружности в плоскость и множеством целых чисел.

В дальнейшем эта теорема Уитни была значительно обобщена Смейлом, Хиршем, Громовым и другими авторами. В частности, задача классификации погружений любых многообразий с точностью до регулярной гомотопии полностью сведена к задаче гомотопической классификации отображений некоторых пространств. Например, погружения сферы $\mathbb{S}^n$ в пространство $\mathbb{R}^m$ классифицируются элементами гомотопической группы $\pi_n(V_n(\mathbb{R}^m))$ многообразия Штифеля n-реперов в $\mathbb{R}^m$ (поскольку $\pi_2(V_2(\mathbb{R}^3)) = \pi_2(\mathbb{S}^3) = 0$, это означает, что двумерную сферу в трехмерном пространстве регулярной гомотопией можно вывернуть наизнанку!)

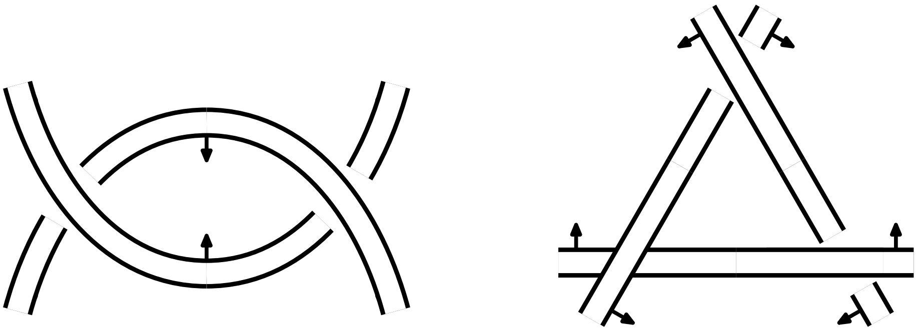


Рис. 1.

Перейдем к доказательству теоремы Уитни. Представим себе, что вдоль кривой уложили кольцо, сделанное из абсолютно упругой стальной проволоки, и зажали его между двумя пластинами, причем естественное состояние проволоки (в котором она была закалена) — прямое. Раздвинем чуть-чуть пластины, так чтобы проволочное кольцо смогло свободно двигаться в образовавшейся щели, оставаясь при этом все время в одной плоскости. Тогда оно начнет двигаться и через некоторое время придет в устойчивое положение. При этом мы сделаем допущение (не влияющее на доказательство теоремы Уитни), что в процессе движения никакие участки проволоки не будут зацепляться так, как показано на рис. 1. (Или будем считать, что каждый раз, когда приближается такое нежелательное событие, кто-то очень быстро разрезает проволоку на одном из этих участков, продевает другой через образовавшийся разрез и тут же запаивает опять.)

Покажем, что для каждого целого n с точностью до движений плоскости имеется ровно одно положение равновесия с числом вращения, равным n. Для этого заметим, что в положении равновесия достигается минимум потенциальной энергии, которая выражается формулой

$$\int K^2 ds,$$

где K — кривизна, ds — элемент длины, и интеграл берется вдоль кривой.

Будем считать, что длина кривой равна единице, и пусть $x(t)$, $y(t)$ — параметризация кривой натуральным параметром, т. е. две такие гладкие периодические с периодом 1 функции, что

$$\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = 1$$

тождественно по t. Запишем вектор скорости в полярных координатах:

$$\dot{x}(t) = \cos\varphi(t)\,, \;\; \dot{y}(t) = \sin\varphi(t).$$

Таким образом, наша кривая однозначно (с точностью до параллельного переноса) задается гладкой функцией $\varphi(t)$:

$$x(t) = \int_0^t \cos\varphi(\tau)d\tau\,, \;\; y(t) = \int_0^t \sin\varphi(\tau)d\tau.$$

При этом условие периодичности функций $x(t)$, $y(t)$ записывается как

$$\int_0^1 \cos\varphi(t)dt = \int_0^1 \sin\varphi(t)dt = 0\,, \tag{1}$$

а условие периодичности их первых производных —

$$\varphi(t+1) = \varphi(t) + 2\pi n\,, \; n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

где $n = N(f)$ есть число вращения кривой, задаваемой функцией $\varphi(t)$.

Легко видеть, что $K = \dot{\varphi}(t)$.

В результате мы получаем следующую вариационную задачу: *найти функцию $\varphi(t)$, заданную на отрезке $[0,1]$, для которой минимально значение интеграла*

$$\int_0^1 \dot{\varphi}(t)^2 dt$$

при ограничениях (1), (2).

Согласно классическому вариационному исчислению[1)], необходимым условием экстремума при ограничениях (1) является существование постоянных множителей Лагранжа λ_1, λ_2, таких, что лагранжиан

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \dot{\varphi}^2 + 2\lambda_1 \cos\varphi + 2\lambda_2 \sin\varphi \tag{3}$$

удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{\varphi} = -\lambda_1 \sin\varphi + \lambda_2 \cos\varphi.$$

[1)] См., например, Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. *Б-ка Кванта, вып. 56.* М.: Наука, 1986.

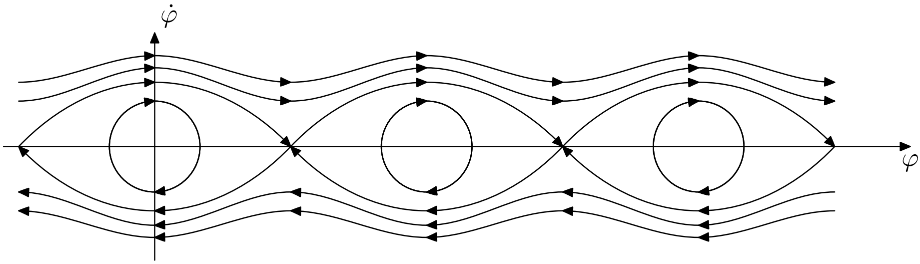


Рис. 2.

Оно приводится к виду

$$\ddot\varphi = -\lambda\sin(\varphi - \varphi_0),$$

где константы λ и φ_0 находятся из соотношений

$$\lambda^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2\,, \quad \cos\varphi_0 = \lambda_1/\lambda\,, \quad \sin\varphi_0 = \lambda_2/\lambda\,.$$

Повернув, если надо, всю кривую на угол φ_0, мы можем считать, что $\varphi_0 = 0$. Таким образом, при $\lambda \neq 0$ функция $\varphi(t)$ является решением уравнения физического маятника

$$\ddot\varphi = -\lambda\sin\varphi, \tag{5}$$

а при $\lambda = 0$ — уравнения $\ddot\varphi = 0$, т. е. линейна.

Случаю линейной функции $\varphi(t)$ очевидно отвечают те и только те погружения, которые несколько раз обходят окружность в том или ином направлении. Таких погружений с точностью до движений плоскости имеется ровно по одному для каждого целого ненулевого значения числа вращения.

Разберем теперь случай $\lambda \neq 0$. Мы сначала покажем, что если кривая удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа, то она имеет вид восьмерки, возможно, пройденной несколько раз, а затем покажем, что все такие кривые регулярно гомотопны.

Итак, пусть $\varphi(t)$ — решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям (1) и (2). Для качественного исследования решений уравнения физического маятника удобно нарисовать его фазовый портрет, т. е. плоскость с координатами $(\varphi, \dot\varphi)$, на которой для каждого решения $\varphi(t)$ нарисована траектория точки с координатами $(\varphi(t), \dot\varphi(t))$. (Эти траектории называются фазовыми кривыми.)

Легко видеть, что вдоль решения уравнения (5) выполняется закон сохранения энергии:

$$E(\varphi, \dot\varphi) = \frac{\dot\varphi^2}{2} - \lambda\cos\varphi = \text{const}.$$

Поэтому фазовые кривые идут вдоль линий уровня энергии $E = \text{const}$ (рис. 2). (Здесь имеется в виду энергия физического маятника, движение которого описывается уравнением (5); эта энергия не имеет никакого отношения к потенциальной энергии согнутой проволоки, минимум которой мы ищем.)

Пусть $U_{\max}$ — потенциальная энергия маятника в верхней (неустойчивой) точке равновесия. Из рисунка видно, что решения уравнения (5) при $E < U_{\max}$ периодические, а при $E \geqslant U_{\max}$ — монотонные, причем в этом случае $\dot\varphi(t)$ нигде не обращается в нуль.

Докажем, что во втором случае не могут выполняться ограничения (1) и (2). Действительно, предположим противное. Тогда, дифференцируя (5) по t, деля полученное равенство на $\dot\varphi$ (именно здесь мы используем, что $\dot\varphi$ нигде не обращается в нуль), и подставляя в (1), получаем:

$$0 = -\int_0^1 \lambda\cos\varphi dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(\ddot\varphi)\frac{1}{\dot\varphi}dt = \frac{\ddot\varphi}{\dot\varphi}\Big|_0^1 - \int_0^1 \ddot\varphi\frac{d}{dt}(\frac{1}{\dot\varphi})dt = \int_0^1 (\frac{\ddot\varphi}{\dot\varphi})^2 dt.$$

Здесь мы воспользовались интегрированием по частям и тем, что функции $\dot\varphi$ и $\ddot\varphi$ периодические (это видно, например, из дифференцирования равенства (2)), а значит, приращение $\ddot\varphi/\dot\varphi$ за период равно нулю. Ясно, что полученное равенство может достигаться лишь в том случае, когда $\varphi(t)$ — линейная непостоянная функция. Но при $\lambda \neq 0$ уравнение (5) таких решений не имеет. Противоречие.

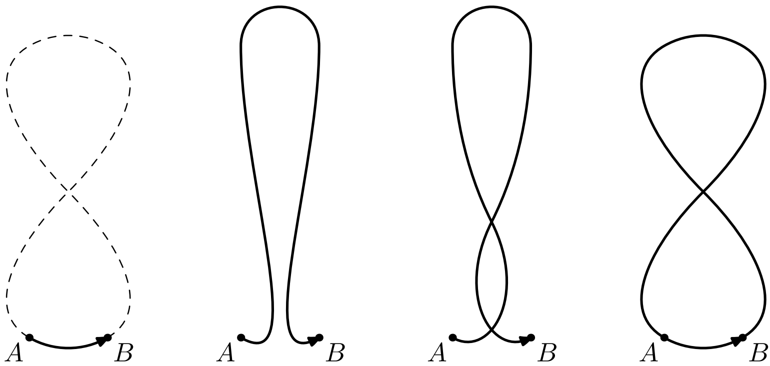


Рис. 3.

Полученное противоречие доказывает, что случаю $\lambda \neq 0$ отвечают периодические решения уравнения (5), причем их фазовые траектории замкнуты и ограничивают выпуклую область. Нетрудно видеть, что таким решениям соответствуют кривые, имеющие вид восьмерки, возможно, пройденной несколько раз в том или другом направлении.

Покажем, что все такие кривые регулярно гомотопны. На рис. 3 на предыдущей странице показано, как из дуги AB в нижней части восьмерки регулярной гомотопией можно получить всю восьмерку, у которой эта дуга пройдена дважды. Применяя последовательно эту операцию, мы можем из однократно пройденной восьмерки получить восьмерку, пройденную любое количество раз в том же направлении. Чтобы сменить направление обхода, достаточно все повернуть на 180°. Теорема доказана.

Является ли приведенное доказательство теоремы Уитни строгим? Не совсем. Осталось недоказанным, что проволока обязательно придет в одно из устойчивых положений. Другими словами, что любое погружение регулярно гомотопно погружению, для которого достигается минимум потенциальной энергии. Физически это утверждение кажется более чем правдоподобным, хотя, строго говоря, a priori неясно, почему нельзя так изогнуть проволоку, чтобы при отпускании она обязательно сломалась из-за неограниченного возрастания кривизны в каком-то месте.

В данном случае можно строго доказать, что такого не произойдет, хотя доказательство не совсем простое.

Интеграл от степени: неочевидное в очевидном

Б. Р. Френкин

Цель этой заметки

Речь пойдет о некоторых взаимосвязях между общеизвестными математическими фактами. Сами эти взаимосвязи, однако, не общеизвестны (и, следовательно, не очевидны). Автор признателен А. К. Ковальджи за плодотворное обсуждение, которое привело к улучшению некоторых доказательств, а также формы изложения в целом.

Каждый, кто изучал математический анализ, знает, что интеграл от степени с показателем -1 есть, с точностью до константы, натуральный логарифм, а при других показателях — степень с коэффициентом. Этот факт сообщается настолько рано, что не порождает никаких вопросов. А между тем ситуация достаточно парадоксальна.

Класс степенных функций выглядит однородным по своей структуре, но интеграл одной из них имеет совершенно иной вид, чем у остальных. Наверное, в основе лежит какой-то существенный факт, который должен проявиться и в других ситуациях. Хочется понять, в чем он состоит. Кроме того, было бы интересно получить интеграл степенной функции в результате единообразного рассуждения, пригодного для любого показателя степени. (В курсе анализа отдельно вычисляются производные от степени и логарифма, и как бы случайно в обоих случаях получается степенная функция.)

В заметке мы выясним эти вопросы, обратившись к тем функциональным уравнениям, которым удовлетворяют степень и логарифм. Все знают, что степень произведения равна произведению степеней, а логарифм произведения — сумме логарифмов. Отсюда удается получить искомый единообразный способ интегрирования степени. Выявляется также связь между степенью и логарифмом, с одной стороны, и гомотетией и сдвигом вещественной прямой — с другой. Загадочная «особенность» при интегрировании степеней оказывается отражением вполне понятного геометрического факта: сумма гомотетии и сдвига либо сводится к гомотетии, либо первое слагаемое в ней — тождественное (и тогда она есть сдвиг).

Интегрирование и функциональные уравнения

Итак, пусть $F(x) = x^\alpha$ — степенная функция с вещественным показателем, заданная в области $x > 0$ (чтобы не иметь дела с разрывом в нуле при отрицательном α). Пусть $G(x)$ — первообразная для $F(x)$; оказывается удобным выбрать ее так, чтобы

$$G(1) = 0. \tag{1}$$

Степенная функция удовлетворяет функциональному уравнению

$$F(xy) = F(x)F(y). \tag{2}$$

Естественно ожидать, что и ее первообразная удовлетворяет какому-нибудь простому уравнению — возможно, также содержащему xy. Поэтому попробуем выразить $G(xy)$ через $G(x)$ и $G(y)$. С учетом (1) и (2) имеем:

$$\begin{gathered} G(xy) = \int_1^{xy} F(t)dt = \int_1^y F(t)dt + \int_y^{xy} F(t)dt = \\ = G(y) + \int_1^x F(ty)d(ty) = G(y) + F(y)y\int_1^x F(t)dt = \\ = G(y) + y^{\alpha+1}G(x). \end{gathered}$$

Для краткости положим $\beta = \alpha + 1$. Мы получили, как и стремились, функциональное уравнение для G:

$$G(xy) = y^\beta G(x) + G(y). \tag{3}$$

Поскольку $xy = yx$, то $y^\beta G(x) + G(y) = x^\beta G(y) + G(x)$, а

$$G(x)(y^\beta - 1) = G(y)(x^\beta - 1). \tag{4}$$

Если выражения в скобках не равны нулю, то

$$\frac{G(x)}{x^\beta - 1} = \frac{G(y)}{(y^\beta - 1)},$$

т. е. каждая из частей этого равенства не зависит от входящей в нее переменной. Тогда искомая первообразная имеет вид

$$G(x) = c(x^\beta - 1) \tag{5}$$

с некоторой константой c.

Пусть теперь одна из скобок в (4) равна нулю — например, $x^\beta - 1 = 0$. Тогда либо $x = 1$, но в этом случае (5) продолжает выполняться ввиду (1); либо $\beta = 0$, и (3) принимает вид

$$G(xy) = G(x) + G(y). \tag{6}$$

При этом $G(x)$, как первообразная для $1/x$, непрерывна и не является тождественным нулем. Хорошо известно, что среди таких функций уравнение (6) выделяет логарифмы.

Основание логарифма не определяется из предыдущих рассуждений, так как уравнение (3) выдерживает умножение функции G на константу. Поэтому нужно продифференцировать полученную функцию и посмотреть, при каком основании логарифма получается функция F. Сказанное относится и к константе c в уравнении (5).

Итак, достигнута одна из поставленных целей: мы нашли единообразное рассуждение, позволяющее проинтегрировать степенную функцию с произвольным показателем. При этом использовались известные функциональные уравнения для степени и логарифма. Однако по-прежнему неясно, какая идея проявляется в расщеплении на два случая: $\alpha = -1$ и все остальное.

Функциональные уравнения и аффинные преобразования

Вернемся к уравнению (3). Фиксируем значение y. Тогда это уравнение показывает, что происходит с функцией $G(x)$ при замене x на xy: ее множество значений подвергается аффинному преобразованию (с коэффициентами, зависящими от y). Рассмотрим это преобразование подробнее.

При $\beta = 0$ получается сдвиг, и $G(x)$ есть логарифм. В остальных случаях мы получаем сумму гомотетии и сдвига вещественной прямой. Но такое преобразование геометрически сводится к гомотетии. Действительно, если P — аффинное преобразование прямой,

$$Px = ax + b, \tag{7а}$$

то существует такое c, что

$$Px - c = a(x - c), \tag{7б}$$

а именно:

$$c = b/(1 - a). \tag{7в}$$

Ввиду (7б) P является гомотетией с центром c.

Итак, если $\beta \neq 0$, то при каждом значении y уравнение (3) задает некоторую гомотетию множества значений $G(x)$. Неподвижная точка этой гомотетии формально зависит от y. Покажем, что на самом деле такой зависимости нет.

Преобразования вида (3) соответствуют умножению переменной x на различные значения y и потому коммутируют между собой. Но если преобразования P, Q некоторого множества коммутируют и имеют по одной неподвижной точке, то эти точки совпадают. Действительно, пусть c — (единственная) неподвижная точка для P. Тогда $P(Qc) = Q(Pc) = Qc$, т. е. Qc — неподвижная точка для P и потому совпадает с c. Значит, c — неподвижная точка для Q, что и требовалось.

Итак, преобразования (3) имеют одну и ту же неподвижную точку c при всех $y > 0$. Это значит (см. (7а)–(7б)), что

$$G(xy) - c = y^{\beta}(G(x) - c),$$

т. е. для функции $G(x) - c$ умножение аргумента на y соответствует гомотетии на множестве значений. Но тогда функция оказывается степенной (с коэффициентом), подобно тому, как в случае сдвига она являлась логарифмом. (Здесь можно рассуждать по аналогии с первой частью заметки: поменяем местами x и y, разделим переменные и в итоге выясним вид $G(x) - c$. Но можно также заметить, что ввиду (3), (7а) и (7в) $c = G(x)/(1 - x^{\beta})$, откуда $G(x) = c(1 - x^{\beta})$.)

Мы получили, естественно, тот же результат, что и раньше. Проиграв в формальной простоте, мы зато выявили суть рассматриваемого явления. Оказывается, различные значения показателя степени можно сопоставить аффинным преобразованиям прямой с различными коэффициентами при переменной. При $\alpha = -1$ это сдвиг, в остальных случаях — гомотетия. Сдвиг естественным образом соответствует логарифму, а гомотетия — степенной функции. «Катастрофа» при интегрировании степенной функции в действительности присутствует в множестве аффинных преобразований прямой: сумма гомотетии и сдвига геометрически не отличается от своего крайнего случая — чистой гомотетии, если только она не была задана как другой крайний случай — чистый сдвиг.

Дополнение 1: Об одном возможном обобщении

Соотношение между $G(x)$ и $G(xy)$, заданное уравнением (3), имеет специфический вид: в нем присутствуют $G(y)$ и степенная функция. Естественное обобщение состояло бы в следующем. Попробуем найти все непрерывные функции $G(x)$, тождественно удовлетворяющие (в области $x > 0$) уравнению

$$G(xy) = A(y)G(x) + B(y) \tag{8}$$

с непрерывными функциями $A(y), B(y)$.

Легко видеть, что если для $G(x)$ выполняется (8), то и для $G(x)+const$ выполнено аналогичное уравнение (и с той же функцией $A(y)$). Поэтому можно считать, что

$$G(1) = 0. \tag{9}$$

Положив тогда $x = 1$, получим

$$G(y) = B(y). \tag{10}$$

Далее мы могли бы, как и выше, использовать коммутативность умножения, но более изящное рассуждение основано на его ассоциативности.

Из (8) и (10) следует,что

$$G(xyz) = A(xy)G(z) + G(xy) = A(xy)G(z) + A(x)G(y) + G(x);$$

$$G(xyz) = A(x)G(yz) + G(x) = A(x)A(y)G(z) + A(x)G(y) + G(x).$$

Сравнив эти равенства, видим, что либо $G(z)$ — тождественный нуль, либо выполняется тождество $A(xy) = A(x)A(y)$. В первом случае $A(x)$ может быть любой непрерывной функцией. Во втором случае, как известно, $A(x)$ — либо степень, либо тождественный нуль. Но если $A(x)$ — тождественный нуль,то положим в (8) $y = 1$. Тогда из (10) и (9) следует, что и $G(x)$ — тождественный нуль.

Таким образом, общее уравнение (8) по существу сводится к уравнению (3): $G(x)$ после сдвига на константу либо становится тождественным нулем, либо совпадает с $B(x)$, причем в последнем случае $A(x)$ является степенью.

Дополнение 2: Экспонента и линейная функция — пример на ту же тему

Явление, рассмотренное в заметке, можно наблюдать и в других случаях. Например, при интегрировании экспоненты $e^{\alpha x}$ получается (с точностью до коэффициента и аддитивной константы) экспонента, за исключением единственного случая $\alpha = 0$, когда первообразной является линейная функция. Здесь можно провести рассуждения, аналогичные изложенным выше. Нужно использовать соотношения

$$e^{\alpha(x+y)} = e^{\alpha x}e^{\alpha y},$$

$$\alpha(x+y) = \alpha(x) + \alpha(y).$$

Рассмотрев первообразную H в точке $x + y$, получаем для нее функциональное уравнение

$$H(x+y) = e^{\alpha y}H(x) + H(y)$$

и далее действуем как при анализе уравнения (3). В данном случае экспонента соответствует гомотетии, а линейная функция — сдвигу.

Теорема о пучке коник, проходящих через 4 точки

В. В. Прасолов

Коническим сечением или просто *коникой* называется кривая, задаваемая уравнением

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Семейство коник, проходящих через вершины фиксированного четырехугольника, допускает простое описание. Будем считать, что прямая AB задается линейным уравнением $l_{AB} = 0$. Тогда во всех вершинах четырехугольника $ABCD$ обращаются в нуль как функция $l_{AB} \cdot l_{CD}$, так и функция $l_{BC} \cdot l_{AD}$. Поэтому уравнение

$$\lambda l_{AB} \cdot l_{CD} + \mu l_{BC} \cdot l_{AD} = 0$$

задает конику, проходящую через вершины четырехугольника $ABCD$. Оказывается, верно и обратное.

Теорема 1. *Пусть никакие три из точек A, B, C и D не лежат на одной прямой. Тогда уравнение любой коники, проходящей через точки A, B, C и D, можно представить в виде*

$$\lambda l_{AB} \cdot l_{CD} + \mu l_{BC} \cdot l_{AD} = 0.$$

Доказательство. Можно считать, что прямые AB и AD заданы уравнениями $y = 0$ и $x = 0$ соответственно (система координат не обязательно прямоугольная). Пусть $f = 0$ – уравнение данной коники. Ограничения функций f и $\lambda l_{AB} \cdot l_{CD} + \mu l_{BC} \cdot l_{AD} = \lambda y l_{CD} + \mu x l_{BC}$ на любую из осей координат являются квадратными трехчленами с двумя общими корнями (A и B или A и D). Поэтому числа λ и μ можно подобрать так, что многочлен

$$P(x, y) = f(x, y) - \lambda y l_{CD}(x, y) - \mu x l_{BC}(x, y)$$

обращается в нуль как при $x = 0$, так и при $y = 0$. Это означает, что он делится на xy, т. е. $P(x, y) = xyQ$, где Q – константа. В точке C многочлен P обращается в нуль, а $xy \neq 0$. Поэтому $Q = 0$, т. е.

$$f = \lambda l_{AB} \cdot l_{CD} + \mu l_{BC} \cdot l_{AD}.$$

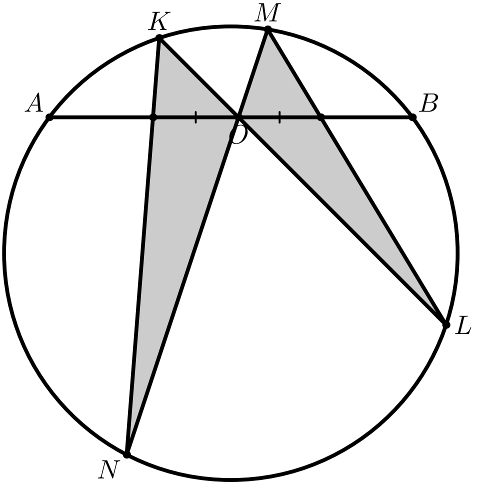


Рис. 1.

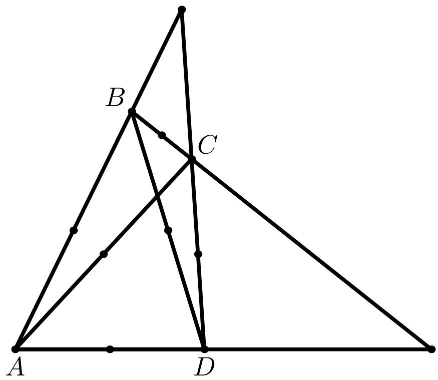


Рис. 2.

Следствие 1. *Пусть $f = 0$ и $g = 0$ – уравнения двух различных коник, проходящих через вершины четырехугольника $ABCD$. Тогда уравнение любой коники, проходящей через вершины четырехугольника $ABCD$, имеет вид $\lambda f + \mu g = 0$.*

Доказательство. Коники, проходящие через вершины четырёхугольника $ABCD$, образуют проективную прямую, порожденную точками $l_{AB} \cdot l_{CD} = 0$ и $l_{AD} \cdot l_{BC} = 0$. Эта прямая порождена также парой любых других точек, например, точками $f = 0$ и $g = 0$.

Теорема 1 позволяет дать простые доказательства многих других геометрических теорем. Приведем несколько таких примеров.

Теорема о бабочке

В связи с тем, что на рис. 1 можно при желании увидеть изображение бабочки, следующее утверждение часто называют теоремой о бабочке.

Теорема 2. *Пусть хорды KL и MN проходят через середину O хорды AB некоторой окружности. Тогда прямые KN и ML пересекают прямую AB в точках, равноудаленных от точки O.*

Доказательство. Через точки K, L, M, и N проходят следующие три коники: окружность $f = 0$, $g = l_{KL} \cdot l_{MN} = 0$ и $h = l_{KN} \cdot l_{ML} = 0$. Поэтому $h = \lambda f + \mu g$. Это равенство верно и для ограничений указанных функций на прямую AB. Введем на AB координату x, приняв точку O

за начало координат. Тогда можно считать, что $f = x^2 - a$ и $g = x^2$, поэтому $h = bx^2 - c$. Следовательно, корни уравнения $h = 0$ равноудалены от точки O.

Приведенное доказательство теоремы о бабочке позволяет доказать следующее её обобщение, в котором никакой бабочки уже не видно.

Теорема 3. *Три коники имеют 4 общих точки. Прямая AB высекает на двух из них хорды, имеющие общую середину O. Тогда точка O является также серединой хорды, высекаемой AB на третьей конике.*

Теорема о двух бабочках

Как мы уже говорили, самопересекающийся четырехугольник до некоторой степени напоминает бабочку. Поэтому следующее утверждение иногда называют теоремой о двух бабочках.

Теорема 4. *Пусть стороны самопересекающихся четырехугольников $KLMN$ и $K'L'M'N'$, вписанных в одну и ту же окружность, пересекают хорду AB этой окружности в точках P, Q, R, S и P', Q', R', S' соответственно. Тогда если три из точек P, Q, R, S совпадают с тремя из точек P', Q', R', S', то и оставшиеся точки тоже совпадают.*

Доказательство. Согласно теореме 1,

$$\lambda l_{KL} l_{MN} + \mu l_{KN} l_{ML} = f = \lambda' l_{K'L'} l_{M'N'} + \mu' l_{K'N'} l_{M'L'}.$$

Рассмотрев ограничение этого равенства на прямую AB, получим равенство вида

$$\alpha(x-p)(x-q) + \beta(x-r)(x-s) = \alpha'(x-p)(x-q) + \beta'(x-r)(x-s'). \quad (1)$$

При этом требуется доказать, что $s = s'$.

Равенство (1) можно преобразовать к виду

$$\alpha''(x-p)(x-q) = (x-r)[\beta(x-s) - \beta'(x-s')].$$

В том случае, когда точки P, Q, R, S попарно различны, $(x-p)(x-q)$ не делится на $(x-r)$. Поэтому $\beta(x-s) - \beta'(x-s') = 0$. Следовательно, $s = s'$.

Точки пересечения прямых Паскаля

Рассмотрим шестиугольник $ABCDEF$, вершины которого лежат на конике $f = 0$. Четырехугольники $ABCD$, $AFED$ и $BEFC$ вписаны в эту конику, поэтому f можно представить в любом из следующих видов:

$$f = \lambda_1 l_{AB} \cdot l_{CD} + \mu_1 l_{AD} \cdot l_{BC}, \tag{1}$$

$$f = \lambda_2 l_{AF} \cdot l_{ED} + \mu_2 l_{AD} \cdot l_{EF}, \tag{2}$$

$$f = \lambda_3 l_{BE} \cdot l_{CF} + \mu_3 l_{BC} \cdot l_{EF}. \tag{3}$$

Приравнивая выражения (1) и (2), получаем

$$\lambda_1 l_{AB} \cdot l_{CD} - \lambda_2 l_{AF} \cdot l_{ED} = (\mu_1 l_{BC} - \mu_2 l_{EF}) l_{AD}.$$

Пусть X — точка пересечения прямых AB и ED. В точке X обращаются в нуль функции $l_{AB} \cdot l_{CD}$ и $l_{AF} \cdot l_{ED}$, а функция l_{AD} в этой точке в нуль не обращается. Следовательно, в точке X обращается в нуль функция $\mu_1 l_{BC} - \mu_2 l_{EF}$, т. е. точка X лежит на прямой $\mu_1 l_{BC} = \mu_2 l_{EF}$. Аналогично доказывается, что на прямой $\mu_1 l_{BC} = \mu_2 l_{EF}$ лежит точка пересечения прямых CD и AF. Очевидно также, что точка пересечения прямых BC и EF лежит на прямой $\mu_1 l_{BC} = \mu_2 l_{EF}$. В результате получаем следующее утверждение.

Теорема 5 (Паскаль). *Если точки A, B, C, D, E и F лежат на одной конике, то точки пересечения прямых AB и DE, BC и EF, CD и FA лежат на одной прямой.*

Но продолжим рассуждение дальше. Приравнивая (2) и (3), получим, что точки пересечения прямых AF и BE, ED и CF, AD и BC лежат на прямой $\mu_2 l_{AD} = \mu_3 l_{BC}$. А приравняв (1) и (3), получим, что точки пересечения прямых AB и CF, CD и BE, AD и EF лежат на прямой $\mu_1 l_{AD} = \mu_3 l_{EF}$. Легко проверить, что полученные прямые

$$\mu_1 l_{BC} = \mu_2 l_{EF}, \quad \mu_2 l_{AD} = \mu_3 l_{BC} \quad \text{и } \mu_1 l_{AD} = \mu_3 l_{EF}$$

пересекаются в одной точке. В самом деле, если X – точка пересечения первых двух из этих прямых, то

$$\mu_1 \mu_2 l_{BC}(x) l_{AD}(x) = \mu_2 \mu_3 l_{EF}(x) l_{BC}(x).$$

Сократив на $\mu_2 l_{BC}(x)$, получим $\mu_1 l_{AD}(x) = \mu_3 l_{EF}(x)$ (мы не будем останавливаться на обсуждении вырожденного случая, когда $\mu_2 l_{BC}(x) = 0$).

Будем называть *прямой Паскаля* шестиугольника, вписанного в конику, прямую, на которой лежат точки пересечения пар его противоположных сторон. При этом шестиугольником можно считать и замкнутую самопересекающуюся ломаную. Доказанное выше утверждение можно сформулировать следующим образом.

Теорема 6 (Штейнер). *Пусть точки A, B, C, D, E, F лежат на одной конике. Тогда прямые Паскаля шестиугольников $ABCDEF$, $ADEBCF$ и $ADCFEB$ пересекаются в одной точке.*

Напомним, что при доказательстве этой теоремы исходными четырехугольниками были $ABCD$, $AFED$ и $BEFC$. Можно исходить также из четырехугольников $ABFE$, $ABDC$ и $CDFE$. Тогда получим следующее утверждение.

Теорема 7 (Киркман). *Прямые Паскаля шестиугольников $ABFDCE$, $AEFBDC$ и $ABDFEC$ пересекаются в одной точке.*

Нетрудно убедиться, что данным шести точкам на конике соответствует 60 прямых Паскаля. При этом каждая прямая Паскаля входит ровно в одну тройку Штейнера и в три тройки Киркмана.

Коники с перпендикулярными осями

Теорема 8. *Если две коники имеют четыре общих точки, то эти точки лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда оси коник перпендикулярны.*

Доказательство. На направление осей коники влияют лишь квадратичные члены её уравнения, поэтому будем учитывать только их. Можно считать, что уравнение одной из коник имеет вид $ax^2 + by^2 + \dots = 0$. Если линейная комбинация этого уравнения и уравнения $a_1x^2 + b_1y^2 + c_1xy + \dots =$ $= 0$ имеет вид $x^2 + y^2 + \dots = 0$, то $c_1 = 0$, т. е. оси коник перпендикулярны. Пусть, наоборот, $c_1 = 0$. Положим $\lambda = -\dfrac{a-b}{a_1-b_1}$ (случай $a_1 = b_1$ соответствует окружности). Тогда $a + \lambda a_1 = b + \lambda b_1$. Остается заметить, что если $a + \lambda a_1 = b + \lambda b_1 = 0$, то рассматриваемые коники имеют не более двух общих точек, так как среди линейных комбинаций их уравнений есть линейное уравнение.

Гиперболы с перпендикулярными асимптотами

Теорема 9. *Любая коника, проходящая через вершины треугольника ABC и точку пересечения его высот H, является гиперболой с перпендикулярными асимптотами.*

Доказательство. Нетрудно убедиться, что коника

$$ax^2 + bxy + cy^2 + \cdots = 0$$

является гиперболой с перпендикулярными асимптотами тогда и только тогда, когда $a+c=0$. Поэтому линейная комбинация уравнений гипербол с перпендикулярными асимптотами тоже является уравнением гиперболы с перпендикулярными асимптотами. В пучке коник, проходящих через точки A, B, C и H, есть две (вырожденных) гиперболы с перпендикулярными асимптотами, а именно, $l_{AB} \cdot l_{CH} = 0$ и $l_{BC} \cdot l_{AH} = 0$. Следовательно, все коники этого пучка являются гиперболами с перпендикулярными асимптотами.

Центры коник одного пучка

Теорема 10. *Центры коник, проходящих через точки A, B, C и D, образуют конику* Γ.

Доказательство. Коника, проходящая через точки A, B, C и D, имеет уравнение $F = 0$, где $F = \lambda l_{AB} \cdot l_{CD} + l_{BC} \cdot l_{AD}$. Центр этой коники задается системой уравнений $F_x = 0, F_y = 0$; оба эти уравнения линейны по x, y и λ. Выразив λ из одного уравнения и подставив это выражение во второе уравнение, получим уравнение второго порядка, связывающее x и y.

В заключение предлагаем читателям проверить следующие свойства коники Γ.

1. Γ проходит через 6 середин отрезков, соединяющих пары данных точек, и через 3 точки пересечения прямых, соединяющих пары данных точек.
2. Центр Γ совпадает с центром масс точек A, B, C и D.
3. Если D — точка пересечения высот треугольника ABC, то Γ — окружность девяти точек этого треугольника.
4. Если четырехугольник $ABCD$ вписанный, то Γ — гипербола с перпендикулярными асимптотами. В этом случае оси всех коник пучка параллельны асимптотам Γ.

Наш семинар: математические сюжеты

Экстремальные расположения точек на сфере

Н. Н. Андреев В. А. Юдин

Введение

Имеется целый ряд хорошо известных задач: как расположить N точек на сфере, чтобы
а) сумма всевозможных расстояний между ними стало наибольшим?
б) наименьшее расстояние между точками стало наибольшим (задача о диктаторах)?
в) произведение расстояний было наибольшим?
В настоящей статье мы рассмотрим вопрос о расположении точек, минимизирующих потенциальную энергию взаимодействия системы зарядов. Далее через ab будет обозначаться скалярное произведение векторов a, b из трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, $|a| = \sqrt{aa}$ — длина вектора a; $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ — единичная сфера из $\mathbb{R}^3$.

Задача. *Пусть на сфере «прибиты гвоздями» N положительных зарядов $q_1, \ldots, q_N$ в точках $a^{(1)}, \ldots, a^{(N)}$. По закону Кулона потенциальная энергия системы зарядов равна*

$$W = \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|a^{(i)} - a^{(j)}|},$$

где $|a^{(i)} - a^{(j)}|$ — расстояние между точками $a^{(i)}$ и $a^{(j)}$, т. е. длина отрезка, соединяющего эти точки. Что произойдет с зарядами, если *«гвозди выдернуть»? К каким расположениям будут стремиться заряды, стремясь минимизировать потенциальную энергию системы?*

В дальнейшем ограничимся рассмотрением равных зарядов. В начале века Дж. Дж. Томсон [1] проводил эксперимент по нахождению наилучших расположений для небольших количеств зарядов. Так, при $N = 4, 6, 12$ получились классические конфигурации: тетраэдр, октаэдр и икосаэдр. Интересно отметить, что при некоторых N (например $N = 5$) эксперименты приводили к различным конфигурациям.

Будем рассматривать задачу расположения на единичной сфере N точек $a^{(1)}, \dots, a^{(N)}$, для которых энергия

$$W = \sum_{i \neq j} \frac{1}{|a^{(i)} - a^{(j)}|}$$

принимает наименьшее значение. Обозначим ее $W(N)$. Как решать такие задачи? В общем случае — произвольного N — ответ неизвестен. Для малых N: $N = 2, 3, 4$ нетрудно догадаться, и с помощью хорошо известных неравенств о среднем арифметическом, среднем геометрическом и среднем гармоническом доказать экстремальность конструкций:

$N = 2$ — две произвольные противоположные точки на сфере;

$N = 3$ — три вершины правильного треугольника, расположенные на произвольной дуге большого круга сферы;

$N = 4$ — четыре вершины правильного тетраэдра, вписанного в сферу.

Здесь мы докажем, что для $N = 6, 12$ экстремальные конструкции задаются вершинами октаэдра и икосаэдра, вписанных в сферу. Для доказательства нам потребуются сведения о многочленах Лежандра и интерполяционных многочленах Эрмита.

Многочлены Лежандра

Определим многочлены P_n, где n — натуральное число, с помощью рекуррентных формул:

$$P_0 = 1, \quad P_1 = t, \quad P_2 = \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \quad P_3 = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t), \dots,$$

$$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)tP_n - nP_{n-1}.$$

Многочлены $P_0, P_1, P_2, \dots$, каждый из которых имеет степень, указанную его индексом, называются многочленами Лежандра.

Многочлены Лежандра обладают рядом замечательных свойств. Нам понадобится

Свойство положительной определенности. Для любого положительного числа n и любого конечного множества M точек сферы выполняется неравенство

$$\sum_{a,b\in M} P_n(ab) \geqslant 0. \tag{$*$}$$

В последние годы использование неравенства $(*)$ и его аналогов привели к точному решению ряда известных задач дискретной геометрии и теории кодирования.

Ввиду важности $(*)$ приведем его доказательство. В математической физике хорошо известна [2, стр. 484] формула Лапласа. В частном случае она приводит к равенству

$$P_k(ab) = \frac{2k+1}{4\pi}\int_S P_k(ar)P_k(br)\,dr, \quad r=(x,y,z),\ k=0,1,2,\ldots.$$

Для любого $k=0,1,2,\ldots$, складывая это равенство для $a,b\in M$, найдем:

$$\sum_{a,b\in M} P_k(ab) = \frac{2k+1}{4\pi}\int_S \left(\sum_{a,b\in M} P_k(ar)P_k(br)\right) dr =$$

$$= \frac{2k+1}{4\pi}\int_S \left|\sum_{a\in M} P_k(ar)\right|^2 dr \geqslant 0.$$

Неравенство $(*)$ доказано.

Интерполяционные многочлены

Пусть $\{t_i\}_{i=1}^q \subset (a,b)$, $t_1 < t_2 < \cdots < t_q$, — q различных точек из интервала (a,b). Алгебраический многочлен $h_{q-1}(t)$ степени $q-1$ называется интерполяционным многочленом Лагранжа для функции $y(t)$ в точках $t_1,\ldots,t_q$, называемых точками интерполяции, если

$$h(t_1)=y(t_1),\ldots,h(t_q)=y(t_q).$$

Если же степень многочлена равна $2q-1$ и в точках $\{t_i\}_{i=1}^q$ выполнены дополнительные условия совпадения значений производных

$$h'(t_1)=y'(t_1),\ldots,h'(t_q)=y'(t_q),$$

то он называется интерполяционным многочленом Эрмита. А. А. Марков нашел формулу для уклонения многочлена Эрмита от функции $y(t)$.

Теорема. *Пусть $y(t)$ — непрерывная функция на отрезке $[t_1,t_q]$ — имеет производную порядка $2q$ на интервале (t_1,t_q). Тогда найдется точка τ, $\tau\in(t_1,t_q)$, такая, что*

$$y(t)-h_{2q-1}(t) = \frac{y^{(2q)}(\tau)}{(2q)!}(t-t_1)^2\ldots(t-t_q)^2.$$

Из этой теоремы в частности вытекает, что если $y^{(2q)}(\tau) \geqslant 0, \quad t_1 < < \tau < t_q$, то

$$y(t) \geqslant h_{2q-1}(t), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_q,$$

т. е. график интерполяционного многочлена Эрмита всегда расположен ниже графика функции $y(t)$. Для наших целей понадобится небольшое видоизменение этой теоремы.

Теорема. *Пусть*
1) Функция $y(t)$ непрерывна на $[t_0, h]$, $t_0 < t_1 < \cdots < t_q \leqslant h$, и имеет производную порядка $2q+1$ на (t_0, h);
2) алгебраический многочлен h_{2q} степени $2q$ таков, что

$$h_{2q}(t_i) = y(t_i),\ i = 0, 1, \ldots, q; \quad h'_{2q}(t_i) = y'(t_i),\ i = 1, 2, \ldots, q.$$

Тогда на (t_0, h) найдется точка τ такая, что

$$y(t) - h_{2q}(t) = \frac{y^{(2q+1)}(\tau)}{(2q+1)!}(t - t_0)(t - t_1)^2 \ldots (t - t_q)^2. \tag{$**$}$$

Доказательство. Зафиксируем t такое, что $t \neq t_i,\ i = 0, 1, \ldots, q$. Рассмотрим функцию

$$z(\tau) = y(\tau) - h_{2q}(\tau) - \frac{y(t) - h_{2q}(t)}{\omega(t)}\omega(\tau),$$

где $\omega(\tau) = (\tau - t_0)(\tau - t_1)^2 \ldots (\tau - t_q)^2$. Понятно, что

$$z(t) = 0; \quad z(t_j) = 0,\ j = 0, 1, \ldots q.$$

Значит, по теореме Ролля, утверждающей, что между двумя нулями дифференцируемой функции лежит ноль ее производной, существует по крайней мере $q+1$ точка, ни одна из которых не совпадает с точками $t_0, \ldots, t_q$, в которых $z'(\tau)$ обращается в ноль. Кроме того, из второго условия теоремы и вида функции $\omega(\tau)$ заключаем, что $z'(t_1) = \cdots = z'(t_q) = 0$. В итоге имеем, что производная $z'(\tau)$ обращается в ноль по крайней мере в $2q+1$ различной точке из (t_0, h). Применяя теорему Ролля еще раз, находим, что $z''(\tau)$ обращается в ноль по крайней мере в $2q$ различных точках интервала (t_0, h). Применяя теорему Ролля еще $2q-1$ раз, получаем, что найдется точка τ, $\tau \in (t_0, h)$, в которой $z^{(2q+1)}(\tau) = 0$. Так как степень многочлена $h_{2q}(t)$ равна $2q$, то ${h_{2q}}^{(2q+1)}(t) = 0$. Степень многочлена $\omega(\tau)$ равна $2q+1$, коэффициент при τ^{2q+1} равен 1, и значит $\omega^{(2q+1)}(\tau) = (2q+1)!$. Учитывая это, получаем

$$0 = z^{(2q+1)}(\tau) = y^{(2q+1)}(\tau) - \frac{y(t) - h_{2q}(t)}{\omega(t)}(2q+1)!,$$

откуда следует утверждение теоремы.

Замечание. Пусть $\alpha > 0$, $K > 0$, q — произвольное натуральное число. Тогда для любого $-1 \leqslant t < 1$

$$y(t) = K(1-t)^{-\alpha} \geqslant h_{2q}(t),$$

где h_{2q} — многочлен удовлетворяющий условиям теоремы 1. Действительно, возьмем произвольные $-1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_q \leqslant h < 1$. Функция $y(t)$ абсолютно монотонна на $(-1,1)$, т. е. ее производные любого порядка неотрицательны на интервале $(-1,1)$. Тогда из $(**)$ находим, что $y(t) - h_{2q}(t) \geqslant 0$ для $-1 \leqslant t \leqslant h$.

Используя приведенные выше сведения, перейдем к точному решению нашей экстремальной задачи.

Оценка снизу

Теперь предложим метод, позволяющий находить оценку снизу величины $W(N)$ — потенциальной энергии системы из N равных зарядов, расположенных на единичной сфере.

Теорема 1. *Пусть алгебраический многочлен $h_m(t)$ таков, что*
1) Коэффициенты разложения $h_m(t)$ по многочленам Лежандра неотрицательны, т. е.

$$h_m(t) = c_0P_0(t) + c_1P_1(t) + \cdots + c_mP_m(t), \qquad \text{где } c_i \geqslant 0,\ c_0 > 0.$$

2) Справедливо неравенство

$$h_m(t) \leqslant y(t) = (1-t)^{-1/2}, \qquad -1 \leqslant t \leqslant 1.$$

Тогда для любого натурального N, $N \geqslant 2$

$$W(N) \geqslant \frac{N}{\sqrt{2}} \left(Nc_0 - h(1)\right).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный набор из N точек $\{a^{(i)}\}_{i=1}^{N}$, лежащих на единичной сфере S. Так как $a^{(i)} \in S$, то

$$|a^{(i)} - a^{(j)}| = \sqrt{|a^{(i)} - a^{(j)}|^2} = \sqrt{a^{(i)}a^{(i)} - 2a^{(i)}a^{(j)} + a^{(j)}a^{(j)}} =$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{1-t}, \quad \text{где } t = a^{(i)}a^{(j)},$$

и из второго условия теоремы находим, что для $i \neq j$

$$\frac{1}{|a^{(i)} - a^{(j)}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} y(a^{(i)} a^{(j)}) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} h_m(a^{(i)} a^{(j)}).$$

Набор точек был произвольным, следовательно, для величины $W(N)$ получаем оценку снизу:

$$W(N) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{1}{|a^{(i)} - a^{(j)}|} \geqslant \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{1}{\sqrt{2}} h_m(a^{(i)} a^{(j)}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{i,j=1}^{N} h_m(a^{(i)} a^{(j)}) - \sum_{i=1}^{N} h_m(a^{(i)} a^{(i)}) \right).$$

Так как при $i = j$ $a^{(i)} a^{(j)} = 1$, то

$$W(N) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Bigg(c_0 \sum_{i,j=1}^{N} 1 + c_1 \sum_{i,j=1}^{N} P_1(a^{(i)} a^{(j)}) + \ldots$$
$$\cdots + c_m \sum_{i,j=1}^{N} P_m(a^{(i)} a^{(j)}) - N h(1) \Bigg).$$

Вследствие положительности коэффициентов c_i и положительной определенности многочленов Лежандра имеем

$$W(N) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \left(N^2 c_0 - N h(1) \right),$$

что и дает оценку снизу.

Оценка сверху будет даваться конкретными примерами расположения зарядов. В случае $N = 6, 12$ оценки сверху совпадут с оценками снизу, и значит, энергия в этих случаях будет в точности равняться приведенным величинам.

Вычисление $W(6)$

Поместим шесть зарядов в вершины октаэдра, являющиеся пересечением координатных осей с единичной сферой: в точки $\pm(1, 0, 0)$; $\pm(0, 1, 0)$; $\pm(0, 0, 1)$. Непосредственный подсчет показывает, что для этого расположения зарядов энергия равна $3 + 12\sqrt{2}$. Это является оценкой $W(6)$ сверху.

Получим оценку снизу. С этой целью многочлен $h_2(t)$, будем строить так, чтобы

$$h_2(-1) = y(-1),\ h_2(0) = y(0),\ h_2'(0) = y'(0); \quad \text{где } y(t) = (1-t)^{-1/2}.$$

Эти соотношения позволяют найти явный вид многочлена второго порядка и разложить его по многочленам Лежандра:

$$h_2(t) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right) P_2(t) + \frac{1}{2} P_1(t) + \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\right) P_0(t).$$

Все три коэффициента $c_0,\ c_1,\ c_2$ положительны. По теореме 1 выполнено и второе условие теоремы 2, что позволяет нам воспользоваться ею. Вычисляя $h_2(1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ находим, что

$$W(6) \geqslant \frac{6}{\sqrt{2}}\left(6\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\right) - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3 + 12\sqrt{2}.$$

Таким образом доказано, что $W(6) = 3 + 12\sqrt{2}$.

Вычисление $W(12)$

В данном случае экстремальным расположением точек будет расположение их в вершинах икосаэдра. Икосаэдр является одним из пяти правильных многогранников и имеет 12 вершин, 20 граней и 30 ребер. Как в этой ситуации строить многочлен? Так как для точек $a, b \in S$ произведение ab равно косинусу угла между векторами с концами в точках a, b, то предварительно нужно разобраться в углах между 12 вершинами икосаэдра. Через α обозначим золотое сечение — наибольший корень уравнения $\alpha^2 = \alpha + 1$. Тогда $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Двенадцать вершин икосаэдра имеют координаты: $\pm(\alpha, 1, 0)$, $\pm(0, \alpha, 1)$, $\pm(1, 0, \alpha)$, $\pm(\alpha, -1, 0)$, $\pm(0, \alpha, -1)$, $\pm(-1, 0, \alpha)$. Чтобы они принадлежали единичной сфере, поделим все координаты на $\sqrt{\alpha^2 + 1}$. Нетрудно подсчитать, что всевозможные скалярные произведения векторов, направленных из начала координат в вершины икосаэдра, дают числа $\pm 1/\sqrt{5}$ и ± 1. Это подсказывает нам способ выбора многочлена в теореме 2: он должен удовлетворять соотношениям

$$h(-1) = y(-1),\ h(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}) = y(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}),\ h'(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}) = y'(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}).$$

Эти соотношения определяют уже многочлен четвертого порядка. Для дальнейшего нужно повторить рассуждения, проведенные нами для случая $N = 6$, но ввиду громоздких выкладок мы их опустим. Напишем лишь ответ:

$$W(12) = 6 + 15\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + 15\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Дизайны

В связи с решением ряда задач из различных разделов математики возникло понятие дизайна. Постараемся познакомить Вас с этим понятием.

В каких случаях описанный выше метод дает точный ответ? При получении оценки снизу мы используем два неравенства: $y(t) \geqslant h(t)$ и $\sum_{a,b\in M} P_k(ab) \geqslant 0$. Значит, точный ответ возможен лишь в случае, когда они обращаются в равенство. Для обращения в равенство первого неравенства мы специальным образом выбирали точки интерполяции. Надо еще так выбирать множество M, чтобы и второе неравенство обращалось в равенство. Так мы естественным образом приходим к понятию дизайна.

Определение 1. *Множество точек $D = \{d^{(i)}\}_{i=1}^N, \quad D \subset S$ называется дизайном порядка q, если выполнены равенства*

$$\sum_{i=1}^{N} P_k(xd^{(i)}) \equiv 0, \quad k = 1, \ldots, q,$$

для любой точки $x \in S$.

Эквивалентным ему является следующее

Определение 2. *Множество точек $D = \{d^{(i)}\}_{i=1}^N, \quad D \subset S$ называется дизайном порядка q, если выполнены равенства*

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} P_k(d^{(i)}d^{(j)}) \equiv 0, \quad k = 1, \ldots, q.$$

Дизайн порядка q называется *минимальным*, если он содержит наименьшее количество точек, необходимых для выполнения указанных тождеств. К сожалению, о минимальных дизайнах известно очень мало. Известен лишь их конечный набор. Любые две диаметрально противоположные точки на сфере являются дизайном первого порядка. Вершины вписанного в сферу тетраэдра являются примером минимального дизайна второго порядка, вершины вписанного в сферу октаэдра — дизайн третьего порядка, а 12 точек — вершин вписанного в сферу икосаэдра — являются дизайном пятого порядка.

Дельсарт нашел нижнюю границу для количества $N = N(q)$ точек минимального дизайна порядка q:

$$N(q) \geqslant \begin{cases} (k+1)(k+2), & q = 2k+1, \\ (k+1)^2, & q = 2k. \end{cases}$$

Заметим, что для $q = 1,2,3,5$ эта оценка точна, т. е. количество точек, даваемых приведенной оценкой, совпадает с количеством точек минимальных дизайнов соответствующих порядков. Однако это не всегда так.

В связи с различными задачами, в прошлом веке старались написать тождества

$$(x^2+y^2+z^2)^s = \sum_{k=1}^{N}(xa_1^{(k)}+ya_2^{(k)}+za_3^{(k)})^{2s}$$

и подобные им с наименьшим количеством слагаемых, верные для всех чисел x, y, z. Так, например, в 1859 году Лиувилль доказал справедливость равенства

$$24(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^2 = 16x_1^4+16x_2^4+16x_3^4+16x_4^4+\Sigma^8(x_1\pm x_2\pm x_3\pm x_4)^4,$$

где знак Σ^8 означает суммирование аналогичных членов.

Интересно, что подобные тождества оказались тесно связанными с понятием дизайна. В дальнейшем ограничимся минимальными дизайнами нечетного порядка. Доказано, что если дизайн нечетного порядка минимален, то он является самодвойственным. Мы сформулируем без доказательства теорему, которая поможет нам обобщить понятие дизайна. Теперь нам будет удобнее записывать точки посредством их координат, т. е. k-я точка будет обозначаться $(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, a_3^{(k)})$, а запись $\{\pm(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, a_3^{(k)})\}$ будет значить, что в нашем наборе содержится как точка $(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, a_3^{(k)})$, так и точка $(-a_1^{(k)}, -a_2^{(k)}, -a_3^{(k)})$.

Теорема. *Система $2N$ точек $\{\pm(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, a_3^{(k)})\}_{k=1}^N \subset S$ является дизайном нечетного порядка q тогда и только тогда (конечно же, с точностью до вращения), когда верно равенство*

$$(x^2+y^2+z^2)^{\frac{q-1}{2}} = c\sum_{k=1}^{N}(xa_1^{(k)}+ya_2^{(k)}+za_3^{(k)})^{q-1},$$

где c — некоторое число, зависящее только от исходной системы точек. При этом если дизайн минимальный, то в правой части суммируется наименьшее возможное для такого представления число слагаемых.

Примером может служить система точек — вершин икосаэдра — являющаяся дизайном пятого порядка. А именно, равенство

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = \frac{5}{6}\sum_{k=1}^{6}(a_1^{(k)}x+a_2^{(k)}y+a_3^{(k)}z)^4$$

верно тогда и только тогда, когда точки $\{\pm(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, a_3^{(k)})\}_{k=1}^6$ являются вершинами икосаэдра, вписанного в единичную сферу с центром в начале координат.

Эти рассуждения позволяют обобщить понятие дизайна нечетного порядка на случай произвольного количества переменных.

Определение. *Система из $2N$ наборов чисел $\{\pm(a_1^{(k)}, \ldots, a_d^{(k)})\}_{k=1}^N$, удовлетворяющая условиям*
1) $(a_1^{(k)})^2 + (a_2^{(k)})^2 + \cdots + (a_d^{(k)})^2 = 1, \quad 1 \leqslant k \leqslant N$;
2) $(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2)^{\frac{q-1}{2}} = C \sum_{k=1}^N (a_1^{(k)} x_1 + a_2^{(k)} x_2 + \cdots + a_d^{(k)} x_d)^{q-1}$
с некоторой константой C, называется дизайном порядка q размерности d.

Тем самым в этих обозначениях икосаэдр — это дизайн 5-го порядка размерности 3. Рассмотрим несколько примеров таких дизайнов. Равенство

$$(x^2+y^2)^s = \frac{(2^s s!)^2}{(s+1)(2s)!} \sum_{k=1}^{s+1} (a_1^{(k)} x + a_2^{(k)} y)^{2s}$$

верно в том и только в том случае, когда точки $\{\pm(a_1^{(k)}, a_2^{(k)})\}_{k=1}^{s+1}$ являются вершинами правильного $(2s+2)$–угольника, вписанного в единичную окружность с центром в нуле. Эта система точек имеет наглядную физическую интерпретацию: если поместить на окружность k одинаковых зарядов и разрешить им двигаться по окружности, то они расположатся в вершинах правильного k–угольника.

Другой наглядный пример дается равенством

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 = \sum_{k=1}^{d} (a_1^{(k)} x_1 + a_2^{(k)} x_2 + \cdots + a_d^{(k)} x_d)^2,$$

где d — произвольное натуральное число, а последовательности

$$\{(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_d^{(k)})\}_{k=1}^d$$

удовлетворяют равенствам

$$(a_1^{(k)})^2 + (a_2^{(k)})^2 + \cdots + (a_d^{(k)})^2 = 1 \text{ для } 1 \leqslant k \leqslant d,$$
$$a_1^{(i)} a_1^{(j)} + a_2^{(i)} a_2^{(j)} + \cdots + a_d^{(i)} a_d^{(j)} = 0 \text{ для } i \neq j.$$

Например в качестве k-го набора можно взять последовательность чисел, в которой на k-м месте стоит 1, а на всех остальных местах — нули.

При $n = 3$ эта формула будет давать уже известный нам дизайн: шесть наборов $\{\pm(1,0,0),\ \pm(0,1,0),\ \pm(0,0,1)\}$ являются координатами вершин октаэдра, вписанного в единичную сферу.

А рекордным по количеству точек является дизайн 11 порядка размерности 24, состоящий из 98280 наборов чисел, дающих аналогичное предыдущим представление для выражения

$$(x_1^2 + \cdots + x_{24}^2)^5.$$

Дизайны оказываются решением и других задач дискретной геометрии. Кроме того, это понятие оказывается важным и во многих других областях математики. Поэтому отыскание новых минимальных дизайнов является и интересной, и важной задачей.

Список литературы

[1] *Whyte L. L.* Unique arrangements of points on a sphere // The Amer. Math. Monthly. 1952. Vol. 59, no. 9. P. 606–611.

[2] *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.

[3] *Тот Л.Ф.* Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М. 1958.

[4] *Reznick B.* Sums of even powers of real linear forms // Memoirs of Amer. Math. Soc. 1992. Vol. 96, no. 463.

Об одной замечательной нумерации положительных рациональных чисел

Д. Н. Андреев

Введение

Счётность множества рациональных чисел – это один из самых первых фактов, с которыми знакомят начинающих изучать элементарные основы теории множеств. При этом, однако, все известные автору доказательства этого факта довольствуются лишь демонстрацией *принципиальной возможности* нумерации множества рациональных чисел, так или иначе сводя дело к вопросу о нумерации *пар целых чисел* (с надлежащим ограничением на их знаки). В то же время, рациональные числа естественным образом отождествляются лишь с парами *взаимно простых* целых чисел (также с нужным ограничением на знаки), и это обстоятельство при любом «стандартном» способе нумерации делает задачу реального нахождения номера заданного рационального числа — или, наоборот, рационального числа по заданному его номеру — практически безнадёжной.

В настоящей работе строится и изучается один способ нумерации положительных рациональных чисел, обладающий целым рядом замечательных свойств. Прежде всего, в этой нумерации упомянутые выше задачи решаются эффективно: нахождение номера рационального числа p/q требует лишь $O(\log\max(p,q))$ арифметических операций, а нахождение рационального числа по его номеру n выполняется за $O(\log n)$ арифметических операций. Далее, арифметическая функция, осуществляющая нумерацию, оказывается поразительно «гладкой» в сумматорном смысле: она не только обладает средним значением, но и имеет всего лишь логарифмический остаточный член сумматорной формулы! Наконец, эта нумерация естественным образом приводит к простой и красивой формулировке *принципа математической индукции* для положительных рациональных чисел.

1. Предварительные замечания

Мы позволим себе использовать без специальных ссылок простейшие свойства разложений рациональных чисел в (конечные) цепные дроби, которые можно найти практически в любом стандартном курсе элементарной теории чисел.

Через $\mathbb{N}$ мы обозначаем множество натуральных чисел, через $\mathbb{Q}^+$ – множество положительных рациональных чисел. Символом ★ отмечается конец доказательства.

Как известно, любое отличное от нуля рациональное число может быть разложено в обыкновенную конечную цепную дробь

$$[q_0; q_1, \ldots, q_l] \stackrel{\text{def}}{=} q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_l}}} \tag{1}$$

ровно двумя различными способами, один из которых получается из другого заменой $q_l > 1$ (или $q_0 = 1$ при $l = 0$) на $(q_l - 1) + \frac{1}{1}$. Нетрудно понять, что при такой замене сумма $q_0 + \cdots + q_l$ не изменяется; поэтому корректным будет следующее

Определение. *Высотой* $\boldsymbol{h}(r)$ положительного рационального числа r мы будем называть сумму $q_0 + \cdots + q_l$ всех элементов его разложения в обыкновенную цепную дробь вида (1).

Непосредственно очевидны следующие свойства введённого понятия (доказательства предоставляются читателю):

Свойство 1. $\boldsymbol{h}(r)$ принимает только натуральные значения, причём все натуральные числа служат её значениями.

Свойство 2. $\boldsymbol{h}(r) = 1$ тогда и только тогда, когда $r = 1$.

Свойство 3. Для любого $r \in \mathbb{Q}^+$ имеем: $\boldsymbol{h}\left(\dfrac{1}{r}\right) = \boldsymbol{h}(r)$, $\boldsymbol{h}(r+1) = \boldsymbol{h}(r) + 1$.

2. Основная конструкция

Определим арифметическую функцию $\boldsymbol{r}(n)$ следующим образом: положим $\boldsymbol{r}(1) = 1$, и для любого $n \in \mathbb{N}$ пусть $\boldsymbol{r}(2n) = \boldsymbol{r}(n) + 1$, $\boldsymbol{r}(2n+1) = \dfrac{1}{\boldsymbol{r}(n)+1}$. Очевидно, эти условия для всех $n \in \mathbb{N}$ однозначно определяют значение $\boldsymbol{r}(n)$, являющееся положительным рациональным числом.

Теорема 1. Функция $\boldsymbol{r}(n)$ принимает каждое положительное рациональное значение один и только один раз.

Доказательство. 1) Докажем сперва, что для любого $r \in \mathbb{Q}^+$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $\boldsymbol{r}(n) = r$. Доказательство проведём индукцией по величине $\boldsymbol{h}(r)$. База индукции очевидна, поскольку при $\boldsymbol{h}(r) = 1$ имеем $r = 1$, и можно взять $n = 1$, так как $\boldsymbol{r}(1) = 1$. Пусть $h > 1$; предположим, что для $\boldsymbol{h}(r) < h$ требуемое уже доказано, и возьмём произвольное r, для которого $\boldsymbol{h}(r) = h$; заметим, что $r \neq 1$, так как $h > 1$. Если $r > 1$, то $h = \boldsymbol{h}(r) = \boldsymbol{h}(r-1) + 1$, откуда $\boldsymbol{h}(r-1) = h - 1$; по индуктивному предположению, найдётся такое $n' \in \mathbb{N}$, что $\boldsymbol{r}(n') = r - 1$, и, взяв $n = 2n'$, получим $\boldsymbol{r}(n) = \boldsymbol{r}(2n') = \boldsymbol{r}(n') + 1 = r$. Если же $r < 1$, то $\frac{1}{r} > 1$; тогда $h = \boldsymbol{h}(r) = \boldsymbol{h}\left(\frac{1}{r}\right) = \boldsymbol{h}\left(\frac{1}{r} - 1\right) + 1$, откуда $\boldsymbol{h}\left(\frac{1}{r} - 1\right) = h - 1$; по индуктивному предположению, найдётся такое $n' \in \mathbb{N}$, что $\boldsymbol{r}(n') = \frac{1}{r} - 1$, и, взяв $n = 2n' + 1$, получим $\boldsymbol{r}(n) = \boldsymbol{r}(2n' + 1) = \dfrac{1}{\boldsymbol{r}(n') + 1} = r$.

2) Докажем теперь, что для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем $\boldsymbol{r}(n) \neq \boldsymbol{r}(m)$ при $n \in \mathbb{N}$, $n \neq m$; доказательство проведём индукцией по m. База индукции здесь также очевидна: если $n \neq 1$, то либо $n = 2n'$ с некоторым $n' \in \mathbb{N}$, и тогда $\boldsymbol{r}(n) = \boldsymbol{r}(2n') = \boldsymbol{r}(n') + 1 > 1$, либо $n = 2n' + 1$ с некоторым $n' \in \mathbb{N}$, и тогда $\boldsymbol{r}(n) = \boldsymbol{r}(2n' + 1) = \dfrac{1}{\boldsymbol{r}(n') + 1} < 1$. Пусть $m > 1$, и пусть для всех $m' < m$ уже доказано, что $\boldsymbol{r}(n) \neq \boldsymbol{r}(m')$ при $n \in \mathbb{N}$, $n \neq m'$. Возьмём произвольное $n \in \mathbb{N}$, $n \neq m$. Если m чётно, то $m = 2m'$, где $m' \in \mathbb{N}$ и $m' < m$; теперь при нечётном n имеем $\boldsymbol{r}(n) \leqslant 1 < \boldsymbol{r}(m)$, а при чётном n положим $n = 2n'$, где $n' \in \mathbb{N}$, и, очевидно, $n' \neq m'$, откуда $\boldsymbol{r}(n) - \boldsymbol{r}(m) = \boldsymbol{r}(2n') - \boldsymbol{r}(2m') = \boldsymbol{r}(n') - \boldsymbol{r}(m') \neq 0$ по предположению индукции. Если же m нечётно, то $m = 2m' + 1$, где $m' \in \mathbb{N}$ и $m' < m$; теперь при чётном n имеем $\boldsymbol{r}(n) > 1 > \boldsymbol{r}(m)$, а при нечётном n положим $n = 2n' + 1$, где $n' \in \mathbb{N}$, и, очевидно, $n' \neq m'$, откуда

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(n) - \boldsymbol{r}(m) &= \\
&= \boldsymbol{r}(2n'+1) - \boldsymbol{r}(2m'+1) = \frac{1}{\boldsymbol{r}(n') + 1} - \frac{1}{\boldsymbol{r}(m') + 1} = \\
&= \frac{\boldsymbol{r}(m') - \boldsymbol{r}(n')}{(\boldsymbol{r}(m') + 1)(\boldsymbol{r}(n') + 1)} \neq 0
\end{aligned}$$

по предположению индукции. ★

Таким образом, мы видим, что построенная нами функция $\boldsymbol{r}(n)$ действительно осуществляет нумерацию всех положительных рациональных чисел, и, следовательно, на $\mathbb{Q}^+$ определена обратная ей функция со значениями в $\mathbb{N}$, которую мы будем обозначать через $\boldsymbol{n}(r)$.

3. Вычисление нумерации

Теперь займёмся вопросом о том, как связаны между собой соответствующие друг другу значения функций $n = \boldsymbol{n}(r)$ и $r = \boldsymbol{r}(n)$. Оказывается, эта связь выражается тем, что *двоичное разложение* числа n и *разложение в цепную дробь* числа r практически могут быть, что называется, «прочитаны» одно по другому.

Теорема 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Q}^+$ таковы, что $r = \boldsymbol{r}(n)$ и $n = \boldsymbol{n}(r)$. Стандартное представление n в двоичной системе счисления: $n = 2^{m_0} + 2^{m_1} + \dots + 2^{m_l}$, где $0 \leqslant m_0 < \dots < m_l$, и «длинное» разложение r в обыкновенную цепную дробь: $r = [q_0; q_1, \dots, q_{l'-1}, q_{l'}]$, где $q_{l'} = 1$, связаны так, что $l' = l + 1$, и для всех k, $1 \leqslant k \leqslant l$, имеет место равенство $m_k = q_0 + \dots + q_k$.

Доказательство. Перефразируя известное изречение Дж. И. Литлвуда о тождествах, можно сказать, что доказательство этой теоремы тривиально, – *после того, как она сформулирована;* действительно, доказательство, которое мы проведём индукцией по n, сводится к достаточно рутинной проверке.

База индукции усматривается непосредственно: для $n = 1 = 2^0$ имеем $r = 1 = [0; 1]$, так что $l = 0$, $m_0 = 0$; $l' = 1$, $q_0 = 0$, и справедливость утверждения теоремы очевидна. Пусть $n > 1$; предположим, что для всех $n' \in \mathbb{N}$, $n' < n$ утверждение уже доказано. Если n чётно, то $n = 2n'$, где $n' \in \mathbb{N}$, $n' < n$; очевидно, $m_0 > 0$ и $n' = 2^{m_0 - 1} + \dots + 2^{m_l - 1}$; поскольку, по предположению индукции, для $r' = \boldsymbol{r}(n')$ имеем $r' = [m_0 - 1; m_1 - m_0, \dots, m_l - m_{l-1}, 1]$, то $r = r' + 1 = [m_0; m_1 - m_0, \dots, , m_l - m_{l-1}, 1]$, что и утверждается. Если же n нечётно, то $n = 2n' + 1$, где $n' \in \mathbb{N}$, $n' < n$; очевидно, $m_0 = 0$ и $n' = 2^{m_1 - 1} + \dots + 2^{m_l - 1}$; поскольку, по предположению индукции, для $r' = \boldsymbol{r}(n')$ имеем $r' = [m_1 - 1; m_2 - m_1, \dots, m_l - m_{l-1}, 1]$, то $r = \dfrac{1}{r' + 1} = [0; m_1 - 0, \dots, , m_l - m_{l-1}, 1]$, что и утверждается. ★

Следствие. Для нахождения $\boldsymbol{n}(r)$ по r и $\boldsymbol{r}(n)$ по n достаточен объём вычислений, имеющий логарифмический относительно данного порядок.

Действительно, разложение числа $r = p/q$ в обыкновенную цепную дробь сводится к алгоритму Евклида, который, как известно, выполняется за $O(\log \max(p, q))$ шагов с ограниченным числом арифметических операций на каждом шаге, а нам для нахождения n понадобится добавить в каждый шаг также лишь ограниченное число операций. Что же касается разложения числа n в стандартное двоичное представление, то оно, очевидно, осуществляется за $O(\log n)$ шагов с ограниченным числом арифметических операций, а нам для вычисления r, которое сводится к сворачиванию цепной дроби в обыкновенную, понадобится добавить в каждый шаг также лишь ограниченное число операций.

4. Среднее значение

Здесь мы покажем, что функция $\boldsymbol{r}(n)$ обладает средним значением, и получим неулучшаемую оценку остаточного члена её сумматорной формулы. Доказательство основывается на ряде тождеств, которым удовлетворяют функция $\boldsymbol{r}(n)$ и другие, с ней связанные; мы сформулируем их в виде отдельных лемм.

Лемма 1. Для любого $k \in \mathbb{N}$ имеет место тождество:

$$\boldsymbol{r}(4k+1) + \boldsymbol{r}(4k+3) = 1.$$

Доказательство. Очевидно, имеем: $\boldsymbol{r}(4k+1)+\boldsymbol{r}(4k+3) = \dfrac{1}{\boldsymbol{r}(2k)+1} + \dfrac{1}{\boldsymbol{r}(2k+1)+1} = \dfrac{1}{\boldsymbol{r}(k)+2} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{\boldsymbol{r}(k)+1}+1} = \dfrac{1}{\boldsymbol{r}(k)+2} + \dfrac{\boldsymbol{r}(k)+1}{\boldsymbol{r}(k)+2} = 1.$ ★

Лемма 2. Для любого $k \in \mathbb{N}$ имеет место тождество:

$$\boldsymbol{r}(4k) + \boldsymbol{r}(4k+1) + \boldsymbol{r}(4k+2) + \boldsymbol{r}(4k+3) = \boldsymbol{r}(2k) + \boldsymbol{r}(2k+1) + 3. \tag{2}$$

Доказательство. Из леммы 1 следует, что
$\boldsymbol{r}(4k) + \boldsymbol{r}(4k+1) + \boldsymbol{r}(4k+2) + \boldsymbol{r}(4k+3) = \boldsymbol{r}(2k) + 1 + \boldsymbol{r}(2k+1) + 1 + 1 = \boldsymbol{r}(2k) + \boldsymbol{r}(2k+1) + 3.$ ★

Отсюда видно, что только число $3/2$ может претендовать на роль среднего значения функции $\boldsymbol{r}(n)$. Обозначая через $\boldsymbol{R}(n)$ сумматорную функцию для $\boldsymbol{r}(n)$, т. е. $\boldsymbol{R}(n) = \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n}^{k} \boldsymbol{r}(k)$, мы должны были бы рассмотреть теперь разность $\boldsymbol{R}(n) - \frac{3}{2}n$; однако, поскольку мы собираемся вывести *точные* границы изменения остаточного члена, нам будет удобно взять его в несколько модифицированном виде, положив $\boldsymbol{R}(n) = \dfrac{3n-1+\boldsymbol{\rho}(n)}{2}$, так что остаточным членом в собственном смысле этого слова будет не $\boldsymbol{\rho}(n)$, а $\dfrac{\boldsymbol{\rho}(n)-1}{2}$.

Лемма 3. Для любого $m \in \mathbb{N}$ имеют место тождества:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}(4m) &= \boldsymbol{R}(2m) + 3m + \frac{1}{2}\,, \\
\boldsymbol{R}(4m+1) &= \boldsymbol{R}(2m+1) + 3m + \frac{1}{2} - \frac{1}{(\boldsymbol{r}(m)+1)(\boldsymbol{r}(m)+2)}\,, \\
\boldsymbol{R}(4m+2) &= \boldsymbol{R}(2m+1) + 3m + \frac{3}{2} + \frac{1}{\boldsymbol{r}(m)+2}\,, \\
\boldsymbol{R}(4m+3) &= \boldsymbol{R}(2m+1) + 3m + \frac{5}{2}\,.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Доказательство. Применяя формулу (2), для произвольного $m \geqslant 1$ имеем:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}(4m+3) = \boldsymbol{R}(3) + \sum_{1 \leqslant k \leqslant m}^{k} (\boldsymbol{r}(4k) + \boldsymbol{r}(4k+1) + \boldsymbol{r}(4k+2) + \boldsymbol{r}(4k+3)) = \\
= \frac{7}{2} + \sum_{1 \leqslant k \leqslant m}^{k} (\boldsymbol{r}(2k) + \boldsymbol{r}(2k+1) + 3) = 3m + \frac{7}{2} + \sum_{1 \leqslant k \leqslant m}^{k} (\boldsymbol{r}(2k) + \boldsymbol{r}(2k+1)) = \\
= 3m + \frac{5}{2} + \boldsymbol{r}(1) + \sum_{1 \leqslant k \leqslant m}^{k} (\boldsymbol{r}(2k) + \boldsymbol{r}(2k+1)) = 3m + \frac{5}{2} + \sum_{1 \leqslant k \leqslant 2m+1}^{k} \boldsymbol{r}(k) = \\
= \boldsymbol{R}(2m+1) + 3m + \frac{5}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Непосредственно проверяется, что полученная формула *верна также и при* $m = 0$; поэтому, заменяя в ней m на $m-1$, для любого $m \geqslant 1$ получим: $\boldsymbol{R}(4m-1) = \boldsymbol{R}(2m-1) + 3(m-1) + \dfrac{5}{2} = \boldsymbol{R}(2m-1) + 3m - \dfrac{1}{2}$. Отсюда последовательно получим:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}(4m) = \boldsymbol{R}(4m-1) + \boldsymbol{r}(m) = \boldsymbol{R}(2m-1) + 3m - \frac{1}{2} + \boldsymbol{r}(2m) + 1 = \\
= \boldsymbol{R}(2m) + 3m + \frac{1}{2}\,; \\
\boldsymbol{R}(4m+1) = \boldsymbol{R}(4m) + \boldsymbol{r}(4m+1) = \boldsymbol{R}(2m) + 3m + \frac{1}{2} + \frac{1}{\boldsymbol{r}(2m)+1} = \\
= \boldsymbol{R}(2m) + 3m + \frac{1}{2} + \frac{1}{\boldsymbol{r}(m)+2}\,;
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}(4m+2) &= \boldsymbol{R}(4m+1) + \boldsymbol{r}(4m+2) = \\
&= \boldsymbol{R}(2m) + 3m + \frac{1}{2} + \frac{1}{\boldsymbol{r}(m)+2} + \boldsymbol{r}(2m+1) + 1 = \\
&= \boldsymbol{R}(2m+1) + 3m + \frac{3}{2} + \frac{1}{\boldsymbol{r}(m)+2}\,.
\end{aligned}$$

Теперь осталось выразить $\boldsymbol{R}(4m+1)$ не через $\boldsymbol{R}(2m)$, а через $\boldsymbol{R}(2m+1)$; имеем:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}(4m+1) &= \boldsymbol{R}(2m+1) - \boldsymbol{r}(2m+1) + 3m + \frac{1}{2} + \frac{1}{\boldsymbol{r}(m)+2} = \\
&= \boldsymbol{R}(2m+1) - \frac{1}{\boldsymbol{r}(m)+1} + 3m + \frac{1}{2} + \frac{1}{\boldsymbol{r}(m)+2} = \\
&= \boldsymbol{R}(2m+1) + 3m + \frac{1}{2} - \frac{1}{(\boldsymbol{r}(m)+1)(\boldsymbol{r}(m)+2)}\,.
\end{aligned}$$

★

Лемма 4. Для любого $m \in \mathbb{N}$ имеют место тождества:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho}(4m) &= \boldsymbol{\rho}(2m) + 1\,, \\
\boldsymbol{\rho}(4m+1) &= \boldsymbol{\rho}(2m+1) + \frac{\boldsymbol{r}(m)(\boldsymbol{r}(m)+3)}{(\boldsymbol{r}(m)+1)(\boldsymbol{r}(m)+2)}\,, \\
\boldsymbol{\rho}(4m+2) &= \boldsymbol{\rho}(2m+1) + \frac{2}{\boldsymbol{r}(m)+2}\,, \\
\boldsymbol{\rho}(4m+3) &= \boldsymbol{\rho}(2m+1) - 1\,.
\end{aligned} \tag{4}$$

Доказательство. Получается непосредственной подстановкой в формулы (3) всюду $\dfrac{3n-1+\boldsymbol{\rho}(n)}{2}$ вместо $\boldsymbol{R}(n)$ и выполнением очевидных преобразований. ★

Теорема 3. Для любого целого $l \geqslant 0$ при всех n из промежутка $2^l \leqslant \leqslant n < 2^{l+1}$ справедливо неравенство $|\boldsymbol{\rho}(n)| \leqslant l$, причём равенство $\boldsymbol{\rho}(n) = l$ достигается только при $n = 2^l$, а равенство $\boldsymbol{\rho}(n) = -l$ – только при $n = 2^{l+1} - 1$.

Доказательство. Доказывать теорему мы будем индукцией по l. Для $l = 0$ и $l = 1$ утверждение теоремы проверяется непосредственно: так как $\boldsymbol{r}(1) = 1$, $\boldsymbol{r}(2) = 2$, $\boldsymbol{r}(3) = 1/2$, то $\boldsymbol{R}(1) = 1$, $\boldsymbol{R}(2) = 3$, $\boldsymbol{R}(3) = 7/2$, и, значит, $\boldsymbol{\rho}(1) = 0$, $\boldsymbol{\rho}(2) = 1$, $\boldsymbol{\rho}(3) = -1$, так что в этих случаях теорема верна.

Пусть теперь $l > 1$, и пусть уже доказано, что $|\boldsymbol{\rho}(n)| \leqslant l-1$ при $2^{l-1} \leqslant n < 2^l$, причём $\boldsymbol{\rho}(n) = l-1$ только при $n = 2^{l-1}$, а $\boldsymbol{\rho}(n) = -(l-1)$ только при $n = 2^l - 1$. Тогда, по формулам (4), имеем $\boldsymbol{\rho}(2^l) = \boldsymbol{\rho}(2^{l-1}) + 1 = l$ и $\boldsymbol{\rho}(2^{l+1}-1) = \boldsymbol{\rho}(2^l - 1) - 1 = -l$, так что в этой части утверждение теоремы верно. Если же $2^l < n < 2^{l+1} - 1$, то, в зависимости от вычета $n \bmod 4$, имеем следующие возможности:

0) при $n = 4m$, ввиду $n > 2^l$, будет $2^l + 4 \leqslant n \leqslant 2^{l+1} - 4$, откуда $2^{l-1} < 2m < 2^l - 1$, и, значит, $-(l-1) < \boldsymbol{\rho}(2m) < l-1$, а так как по формулам (4) имеем $\boldsymbol{\rho}(n) = \boldsymbol{\rho}(2m) + 1$, то отсюда $-(l-2) < \boldsymbol{\rho}(n) < l$, так что $|\boldsymbol{\rho}(n)| < l$;

1) при $n = 4m+1$ будет $2^l + 1 \leqslant n \leqslant 2^{l+1} - 3$, откуда $2^{l-1} < 2m+1 \leqslant \leqslant 2^l - 1$, и, значит, $-(l-1) \leqslant \boldsymbol{\rho}(2m+1) < l-1$, а так как по формулам (4) имеем $\boldsymbol{\rho}(n) = \boldsymbol{\rho}(2m+1) + \theta_1$, где $0 < \theta_1 < 1$ (ибо $\theta_1 = \dfrac{r(r+3)}{(r+1)(r+2)}$ при $r = \boldsymbol{r}(m)$), то отсюда $-(l-1) < \boldsymbol{\rho}(n) < l$, так что $|\boldsymbol{\rho}(n)| < l$;

2) при $n = 4m+2$ будет $2^l + 2 \leqslant n \leqslant 2^{l+1} - 2$, откуда $2^{l-1} < 2m+1 \leqslant \leqslant 2^l - 1$, и, значит, $-(l-1) \leqslant \boldsymbol{\rho}(2m+1) < l-1$, а так как по формулам (4) имеем $\boldsymbol{\rho}(n) = \boldsymbol{\rho}(2m+1) + \theta_2$, где $0 < \theta_2 < 1$ (ибо $\theta_2 = \dfrac{2}{r+2}$ при $r = \boldsymbol{r}(m)$), то отсюда $-(l-1) < \boldsymbol{\rho}(n) < l$, так что $|\boldsymbol{\rho}(n)| < l$;

3) при $n = 4m+3$, ввиду $n < 2^{l+1} - 1$, будет $2^l + 3 \leqslant n \leqslant 2^{l+1} - 5$, откуда $2^{l-1} < 2m+1 < 2^l - 1$, и, значит, $-(l-1) < \boldsymbol{\rho}(2m+1) < l-1$, а так как по формулам (4) имеем $\boldsymbol{\rho}(n) = \boldsymbol{\rho}(2m+1) - 1$, то отсюда $-l < \boldsymbol{\rho}(n) < l-2$, так что $|\boldsymbol{\rho}(n)| < l$. ★

Следствие. Для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства:

$$\frac{3n - 1 - \lfloor \log_2 n \rfloor}{2} \leqslant \boldsymbol{R}(n) \leqslant \frac{3n - 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor}{2}, \tag{5}$$

в которых как слева, так и справа равенство достигается при бесконечно многих n.

5. Принцип индукции

Построенная нами здесь нумерация $\mathbb{Q}^+$ приводит нас к мысли о том, что вводимый ею, в некотором смысле, «естественный» порядок должен приводить нас к столь же «естественному» процессу индуктивного перехода. В самом деле, по сравнению с $\mathbb{N}$ усложнение невелико: к операции увеличения на единицу добавилась операция взятия обратной величины, и они, слаженно действуя в паре, как хорошие молотобойцы, выковывают одно за другим в совершенном порядке все положительные рациональные числа, начиная с 1. Поэтому нам будет нетрудно сформулировать и доказать следующее утверждение, которое мы вправе будем называть *принципом математической индукции* для положительных рациональных чисел.

Теорема 4. Пусть для каждого положительного рационального числа r задано некоторое утверждение Φ_r. Если утверждение Φ_1 истинно, и из истинности утверждения Φ_r вытекает истинность утверждений Φ_{r+1} и $\Phi_{1/r}$, то все утверждения Φ_r истинны.

Доказательство. Рассмотрим последовательность утверждений $\{\Psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где Ψ_n – это утверждение «Φ_r верно для $r = \boldsymbol{r}(n)$»; ясно, что, в свою очередь, утверждение Φ_r – это, по существу, утверждение «Ψ_n верно для $n = \boldsymbol{n}(r)$». Докажем индукцией по n, что все утверждения Ψ_n верны. База индукции очевидна – Ψ_1 верно, так как $\boldsymbol{r}(1) = 1$, а по условию Φ_1 верно. Пусть теперь $n > 1$; предположим, что утверждения Ψ_m уже доказаны для $1 \leqslant m < n$. Если n чётно, то $n = 2m$, где $m < n$; пусть $r = \boldsymbol{r}(n)$ и $r' = \boldsymbol{r}(m)$. По индуктивному предположению, Ψ_m верно, т. е. верно $\Phi_{r'}$, а так как по условию из этого следует, что верно $\Phi_{r'+1} = \Phi_r$, то верно и Ψ_n. Если же n нечётно, то $n = m+1$, где m чётно и $m < n$; пусть $r = \boldsymbol{r}(n)$ и $r' = \boldsymbol{r}(m)$. По индуктивному предположению, Ψ_m верно, т. е. верно $\Phi_{r'}$, а так как по условию из этого следует, что верно $\Phi_{1/r'} = \Phi_r$, то верно и Ψ_n. ★

Замечание. Заметим, что в доказательстве условием «из Φ_r следует $\Phi_{1/r}$» мы пользовались *только при* $r > 1$: действительно, для чётного m имеем $\boldsymbol{r}(m) = \boldsymbol{r}(\frac{m}{2}) + 1 > 1$. Поэтому формулировку теоремы можно слегка ослабить: *если истинно* Φ_1, *из истинности* Φ_r *вытекает истинность* Φ_{r+1}, *и из истинности* Φ_r *при* $r > 1$ *вытекает истинность* $\Phi_{1/r}$, *то все* Φ_r *истинны.*

6. Заключение

В заключение предлагаем читателю несколько задач для самостоятельного решения; содержащиеся в них результаты проливают, как нам кажется, дополнительный свет на причины столь замечательных свойств построенной нами нумерации $\mathbb{Q}^+$.

Задача 1. Доказать, что для любого $h \in \mathbb{N}$ имеется ровно 2^{h-1} положительных рациональных чисел высоты h, а их номера $\boldsymbol{n}(r)$ удовлетворяют неравенствам $2^{h-1} \leqslant \boldsymbol{n}(r) < 2^h$.

Задача 2. Доказать, что для любого $r \in \mathbb{Q}^+$, $0 < r < 1$, имеем $\boldsymbol{h}(1-r) = \boldsymbol{h}(r)$ и $\boldsymbol{n}(1-r) = \boldsymbol{n}(r) + 2\,\mathrm{sgn}(\frac{1}{2} - r)$.

Диофантовы уравнения для многочленов

В. В. Прасолов

Многочлены обладают многими из свойств, которыми обладают натуральные числа. Например, для многочлена определено разложение на множители, для пары многочленов определен наибольший общий делитель и т. д. В связи с этим для многочленов можно поставить задачи, аналогичные известным задачам и проблемам теории чисел. Как правило, для многочленов задача решается существенно проще. Например, знаменитая гипотеза Ферма о том, что при $n \geqslant 3$ уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений в натуральных числах, была доказана лишь совсем недавно. А её аналог (неразрешимость уравнения $f^n + g^n = h^n$ для многочленов), как мы сейчас увидим, доказывается сравнительно просто.

Описание всех троек натуральных чисел α, β, γ, для которых уравнение $f^\alpha + g^\beta = h^\gamma$ для многочленов f, g, h имеет нетривиальное решение, было получено в конце прошлого века. Мы приведем более современную версию этой классификации.

При доказательстве неразрешимости многих диофантовых уравнений для многочленов весьма эффективным оказывается следующее утверждение.

Теорема 1 (Мейсон). *Пусть $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ — попарно взаимно простые многочлены, связанные соотношением*

$$a(x) + b(x) + c(x) = 0.$$

Тогда степень каждого из этих многочленов не превосходит $n_0(abc) - 1$, где n_0 — количество различных корней многочлена.

Доказательство. Положим $f = a/c$ и $g = b/c$. Тогда f и g — рациональные функции, связанные соотношением $f + g + 1 = 0$. Продифференцировав это равенство, получим $f' = -g'$. Поэтому

$$\frac{b}{a} = \frac{g}{f} = -\frac{f'/f}{g'/g}.$$

Рациональные функции f и g имеют специальный вид $\prod(x-\rho_i)^{r_i}$, $r_i\in\mathbb{Z}$. Для функции $R(x)=\prod(x-\rho_i)^{r_i}$ выполняется равенство

$$\frac{R'}{R}=\sum\frac{r_i}{x-\rho_i}.$$

Пусть $a(x)=\prod(x-\alpha_i)^{a_i}$, $b(x)=\prod(x-\beta_j)^{b_j}$, $c(x)=\prod(x-\gamma_k)^{c_k}$. Тогда

$$\begin{aligned} f'/f &= \sum\frac{a_i}{x-\alpha_i}-\sum\frac{c_k}{x-\gamma_k},\\ g'/g &= \sum\frac{b_j}{x-\beta_j}-\sum\frac{c_k}{x-\gamma_k}. \end{aligned}$$

Поэтому после умножения на многочлен

$$N_0=\prod(x-\alpha_i)(x-\beta_j)(x-\gamma_k)$$

степени $n_0(abc)$ рациональные функции f'/f и g'/g становятся многочленами степени не выше $n_0(abc)-1$. Таким образом, из взаимной простоты многочленов $a(x)$ и $b(x)$ и из равенства

$$\frac{b}{a}=-\frac{N_0 f/f'}{N_0 g/g'}$$

следует, что степень каждого из многочленов $a(x)$ и $b(x)$ не превосходит $n_0(abc)-1$. Для многочлена $c(x)$ доказательство аналогично.

Из теоремы 1 можно извлечь интересные следствия, которые мы сформулируем как теоремы 2–4.

Теорема 2 (Дэвенпорт). *Пусть f и g — взаимно простые многочлены ненулевой степени. Тогда*

$$\deg(f^3-g^2)\geqslant\frac{1}{2}\deg f+1.$$

Доказательство. Если $\deg f^3\neq\deg g^2$, то

$$\deg(f^3-g^2)\geqslant\deg f^3=3\deg f\geqslant\frac{1}{2}\deg f+1.$$

Поэтому можно считать, что $\deg f^3=\deg g^2=6k$.

Рассмотрим многочлены $F=f^3$, $G=g^2$ и $H=F-G=f^3-g^2$. Ясно, что $\deg H\leqslant 6k$. Согласно теореме 1,

$$\max(\deg F,\deg G,\deg H)\leqslant n_0(FGH)-1\leqslant\deg f+\deg g+\deg H-1,$$

т. е.

$$6k \leqslant 2k + 3k + \deg H - 1.$$

Таким образом, $\deg H \geqslant k + 1 = \frac{1}{2}\deg f + 1$.

Замечание. Для многочленов

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 + 2, \\ g(t) &= t^3 + 3t \end{aligned}$$

неравенство Дэвенпорта обращается в равенство.

Теорема 3. *Пусть f, g и h — взаимно простые многочлены, причем хотя бы один из них — не константа. Тогда равенство*

$$f^n + g^n = h^n$$

не может выполняться при $n \geqslant 3$.

Доказательство. Согласно теореме 1, степень каждого из многочленов f^n, g^n и h^n не превосходит

$$\deg f + \deg g + \deg h - 1.$$

Сложив эти три неравенства, получим

$$n(\deg f + \deg g + \deg) \leqslant 3(\deg f + \deg g + \deg h - 1).$$

Следовательно, $n < 3$.

Диофантово уравнение $f^\alpha + g^\beta = h^\gamma$ для многочленов f, g, h имеет очевидное решение, если одно из чисел α, β, γ равно 1. Поэтому будем считать, что $\alpha, \beta, \gamma \geqslant 2$.

Теорема 4. *Пусть α, β, γ — натуральные числа, причем $2 \leqslant \alpha \leqslant \leqslant \beta \leqslant \gamma$. Тогда уравнение*

$$f^\alpha + g^\beta = h^\gamma$$

имеет взаимно простые решения лишь для случая следующих наборов (α, β, γ): $(2, 2, \gamma)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$ и $(2, 3, 5)$.

Доказательство. Пусть a, b и c — степени многочленов f, g и h. Тогда, согласно теореме 1,

$$\begin{aligned} \alpha a &\leqslant a + b + c - 1, & (1) \\ \beta b &\leqslant a + b + c - 1, & (2) \\ \gamma c &\leqslant a + b + c - 1. & (3) \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\alpha(a+b+c) \leqslant \alpha a + \beta b + \gamma c \leqslant 3(a+b+c) - 3,$$

и значит, $\alpha < 3$. По условию $\alpha \geqslant 2$, поэтому $\alpha = 2$. При $\alpha = 2$ неравенство 1 принимает вид

$$a \leqslant b + c - 1. \tag{4}$$

Сложив неравенства (4), (2) и (3), получим

$$\beta b + \gamma c \leqslant 3(b+c) + a - 3.$$

Учитывая, что $\beta \leqslant \gamma$, и еще раз применяя неравенство (1), получаем

$$\beta(b+c) \leqslant 4(b+c) - 4,$$

а значит, $\beta \leqslant 4$, т. е. $\beta = 2$ или 3.

Остается доказать, что если $\beta = 3$, то $\gamma \leqslant 5$. При $\beta = 3$ неравенство (2) принимает вид

$$2\beta \leqslant a + c - 1. \tag{5}$$

Сложив неравенства (4) и (5), получим

$$b \leqslant 2c - 2.$$

В таком случае из неравенства (4) следует, что

$$a \leqslant 3c - 3.$$

Из двух последних неравенств и неравенства (3) следует, что

$$\gamma c \leqslant 6c - 6,$$

поэтому $\gamma \leqslant 5$.

Многочлены, удовлетворяющие соотношению $f^\alpha + g^\beta = h^\gamma$, тесно связаны с правильными многогранниками. Подробно эта связь описана в книге Ф. Клейна[1)]; там же указан способ построения этих многочленов. Мы приведем лишь конечный результат.

Случай $\alpha = \beta = 2$, $\gamma = n$ связан с вырожденным правильным многогранником — плоским n-угольником. Требуемое соотношение имеет вид

$$\left(\frac{x^n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^n-1}{2}\right)^2 = x^n.$$

[1)] Клейн Ф. *Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени.* — М.: Наука. 1989.

Случай $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 3$ связан с правильным тетраэдром. Соотношение имеет вид

$$12i\sqrt{3}(x^5 - x)^2 + (x^4 - 2i\sqrt{3}x^2 + 1)^3 = (x^4 + 2i\sqrt{3}x^2 + 1)^3.$$

Случай $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 4$ связан с кубом и правильным октаэдром. Соотношение имеет вид

$$(x^{12} - 33x^8 - 33x^4 + 1)^2 + 108(x^5 - x)^4 = (x^8 + 14x^4 + 1)^3.$$

Случай $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 5$ связан с додекаэдром и икосаэдром. Соотношение имеет вид $T^2 + h^3 = 1728f^5$, где

$$\begin{aligned} T &= x^{30} + 1 + 522(x^{25} - x^5) - 10005(x^{20} + x^{10}), \\ H &= -(x^{20} + 1) + 228(x^{15} - x^5) - 494x^{10}, \\ f &= x(x^{10} + 11x^5 - 1). \end{aligned}$$

Теорема 3 показывает, что уравнение $x^n + y^n = z^n$, где x, y, z — натуральные числа, имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение точно такое же уравнение для многочленов. Естественно возникает вопрос, не будет ли уравнение $x^\alpha + y^\beta = z^\gamma$ иметь полиномиальные решения в том и только том случае, когда оно будет иметь натуральные решения.

Первый пример обнадеживает — уравнение $x^2 + y^3 = z^4$ имеет как полиномиальные, так и натуральные решения. А именно, бесконечную серию решений этого уравнения в натуральных числах можно построить следующим образом. Положим $x = n(n-1)/2$, $y = n$ и $z^2 = n(n+1)/2$. Требуется подобрать число n так, чтобы число z было целым. Равенство $2z^2 = n(n+1)$ можно записать в виде

$$(2n+1)^2 - 2(2z)^2 = 1.$$

Это — знаменитое уравнение Ферма–Пелля, которое имеет бесконечно много решений. Например, при $n = 8$ получаем $x = 28$, $y = 8$, $z = 6$. Помимо этой бесконечной серии решений есть и другие решения.

Но уравнение $x^2 + y^4 = z^6$ опровергает наши надежды. У этого уравнения нет полиномиальных решений, но есть натуральные решения. Одно из его решений имеет вид $x = 3^7 \cdot 5^9 \cdot 7 \cdot 29^8$, $y = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 29^4$, $z = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 29^3$.

Коммутирующие многочлены

В. О. Бугаенко

Над функциями, как и над числами, можно производить арифметические операции — сложение и умножение. Однако, кроме этих двух привычных операций, на множестве функций, в отличие от множества чисел, существует еще одна — операция композиции. Напомним: композицией двух функций f и g называется функция $f \circ g$ такая, что

$$f \circ g(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(g(x)).$$

Будем придерживаться следующих обозначений.

Тождественную функцию будем обозначать id (тождественная функция определяется равенством $\mathrm{id}(x) \equiv x$). Операцию возведения в степень будем рассматривать относительно операции композиции, а не умножения, как это обычно делается, именно $f^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ раз}}$ для любого натурального числа n. Мы будем обозначать f^{-1} *обратную функцию* к функции f, т. е. такую, что $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$ (если она существует). Естественно, $f^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1}}_{n \text{ раз}}$, $\quad f^0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{id}$. Возведение функции $f(x)$ в n-ю степень в обычном смысле мы будем обозначать $f(x)^n$.

Операция композиции обладает естественным свойством ассоциативности, т. е. для любых функций f, g и h справедливо равенство $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. Однако привычное свойство коммутативности для композиции в общем случае не выполняется; композиции $f \circ g$ и $g \circ f$, как правило, являются различными функциями. Например, если $f(x) = x + 1$, а $g(x) = x^2$, то $f(g(x)) = x^2 + 1$, а $g(f(x)) = x^2 + 2x + 1$.

Для некоторых пар функций равенство

$$f \circ g = g \circ f \tag{1}$$

выполняется. В таком случае функции f и g называют *коммутирующими*.

Очевидно, функции f и g являются коммутирующими в каждом из следующих случаев:

а) $f(x) = g(x)$;

б) $f(x) = x + a$, $g(x) = x + b$ для произвольных чисел a и b;

в) $f(x) = ax$, $g(x) = bx$ для произвольных чисел a и b;

г) $f(x) = x^\alpha$, $g(x) = x^\beta$ для произвольных чисел α и β;

д) $f(x) = h^m(x)$, $g(x) = h^n(x)$ для некоторой функции h и целых (если функция h необратима, то положительных) чисел m и n.

Бывает так, что заметить коммутирование двух функций без непосредственной проверки непросто. Примером таких функций являются многочлены $x^2 - 2$ и $x^3 - 3x$.

Явление коммутирования встречается достаточно редко, и естественным является вопрос описания всех таких случаев, хотя бы для многочленов. Эта задача была сформулирована еще в начале века и полностью решена Дж. Риттом [1]. Позднее появилось множество работ [2, 3, 4], где предлагались различные доказательства этой классификации. Однако все они неэлементарны. Так, исходное доказательство Ритта использовало топологические свойства римановых поверхностей, а работа Дорея и Уэйплса [2] основана на теории нормирований полей.

Элементарное доказательство классификации коммутирующих многочленов не известно до сих пор. В 1977 году школьникам — участникам XI Всесоюзной олимпиады по математике — было предложено разобрать несколько частных случаев этой классификации. Вот как формулировалась задача, предложенная участникам олимпиады.

Мы будем рассматривать многочлены от одного переменного x со старшим коэффициентом 1. Будем говорить, что два таких многочлена P и Q коммутируют, если многочлены $P(Q(x))$ и $Q(P(x))$ тождественно равны (т. е. после раскрытия скобок и приведения к стандартному виду все коэффициенты этих многочленов совпадают).

а) Для каждого числа α найдите все многочлены Q степени не выше трех, коммутирующие с многочленом $P(x) = x^2 - \alpha$.

б) Пусть P — многочлен степени 2, k — натуральное число. Докажите, что существует не более одного многочлена степени k, коммутирующего с P.

в) Найдите многочлены степеней 4 и 8, коммутирующие с данным многочленом степени 2.

г) Многочлены Q и R коммутируют с одним и тем же многочленом P степени 2. Докажите, что они коммутируют между собой.

д) Докажите, что существует бесконечная последовательность многочленов $P_2, P_3, P_4, \ldots, P_k, \ldots$, где P_k — многочлен степени k, в которой любые два многочлена коммутируют и $P_2(x) = x^2 - 2$.

В 1979 году в журнале «Квант» была опубликована статья И. Янтарова (псевдоним И. Н. Бернштейна) [5]. В ней решалась полностью задача Всесоюзной олимпиады, и предлагалось несколько вопросов, элементарные ответы на которые были неизвестны. Одним из таких вопросов был: при каких значениях α существует многочлен нечетной степени (выше первой), коммутирующий с многочленом $x^2 - \alpha$? Фактически, этот вопрос равносилен классификации всех пар коммутирующих многочленов, один из которых имеет степень 2.

Общую задачу можно сформулировать так.

Задача классификации коммутирующих многочленов. *Для данного многочлена P найти все коммутирующие с ним многочлены.*

Мы (не делая специальных оговорок) будем рассматривать лишь многочлены ненулевой степени.

Автор настоящей статьи занялся решением этой задачи, будучи школьником, под руководством А. К. Толпыго и И. Н. Бернштейна. В результате появилось элементарное решение задачи классификации для многочленов второй степени. Ключевая идея, завершившая эту классификацию, принадлежит И. Н. Бернштейну. Изложение этого результата и является основной целью настоящей статьи. Кроме того, задача классификации решается для некоторого достаточно широкого класса кубических многочленов, а также рассматриваются известные примеры коммутирующих многочленов и рациональных функций. Результаты, изложенные в параграфах 4, 6 и 7, принадлежат автору, а изложенные в параграфе 8 — И. Н. Бернштейну. Они были получены в 1979 году, однако публикуются впервые.

В первом параграфе показано, как свести задачу классификации коммутирующих многочленов к более узкому классу так называемых приведенных многочленов. Приведенные многочлены второй степени имеют вид $x^2 - \alpha$; всюду в дальнейшем, кроме параграфов 7 и 9, задача классификации будет рассматриваться только для таких многочленов.

Второй параграф посвящен доказательству единственности многочлена фиксированной степени с данным старшим коэффициентом, коммутирующего с данным многочленом.

Основным результатом третьего параграфа является предложение: *«если два многочлена коммутируют с некоторым многочленом второй степени, то они коммутируют между собой»* и его следствие.

В четвертом параграфе доказывается, что многочлен, коммутирующий с приведенным многочленом второй степени является либо четным, либо нечетным. Как следствие выводится, что для нахождения всех многочленов, коммутирующих с данным многочленом второй степени, достаточно рассмотреть лишь многочлены нечетной степени.

Пятый параграф — самый «конструктивный». Здесь приводятся нетривиальные примеры — цепочки попарно коммутирующих многочленов всевозможных степеней.

В шестом параграфе приводится достаточно эффективный метод исследования коммутирующих многочленов, использующий понятие неподвижной точки. С помощью него решается задача классификации для «большинства» (в определенном смысле) многочленов второй степени.

В седьмом параграфе, используя метод неподвижных точек, решается задача классификации для многочленов вида $x^3 + \alpha$.

В восьмом параграфе задача классификации для многочленов второй степени решается полностью.

Рациональные функции — следующий после многочленов класс функций, для которого естественно поставить вопрос о классификации коммутирующих функций. Есть основания считать, что для рациональных функций явление коммутирования встречается «чаще», чем для многочленов. Один из способов построения примеров коммутирующих рациональных функций приводится в девятом параграфе.

1. Сопряженные многочлены

Если $H(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ — многочлен первой степени, то для него существует обратный многочлен $H^{-1}(x) = \dfrac{1}{a}x - \dfrac{b}{a}$. (Нетрудно доказать, что многочлены первой степени — единственные, для которых существует обратная функция, также являющаяся многочленом.) С любым многочленом H первой степени можно связать отображение множества всех многочленов в себя, действующее по следующему правилу. Каждый многочлен P отображается в многочлен $P_H = H \circ P \circ H^{-1}$. Такое отображение называется *сопряжением* многочлена P многочленом H.

Два многочлена, один из которых может быть получен из другого сопряжением, называются *сопряженными*. Легко заметить, что сопряженные многочлены имеют одинаковую степень.

Нетрудно проверить следующие свойства:

1. $P = P_{\mathrm{id}}$;

2. Если $Q = P_H$, то $P = Q_{H^{-1}}$;

3. Если $Q = P_{H_1}$, а $R = Q_{H_2}$, то $R = P_{H_2 \circ H_1}$.

Иными словами, сопряженность является отношением эквивалентности на множестве многочленов. Это позволяет разбить множество многочленов на классы сопряженности так, что любые два сопряженных многочлена попадают в один класс, а любые два многочлена, не являющиеся сопряженными, — в разные классы.

Сопряжение обладает важным свойством — любую пару коммутирующих многочленов оно переводит в пару коммутирующих многочленов.

Предложение 1. *Если многочлены P и Q коммутируют, а H — произвольный многочлен первой степени, то многочлены P_H и Q_H тоже коммутируют.*

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&(H \circ P \circ H^{-1}) \circ (H \circ Q \circ H^{-1}) = \\
&= H \circ P \circ (H^{-1} \circ H) \circ Q \circ H^{-1} = H \circ P \circ Q \circ H^{-1} = H \circ Q \circ P \circ H^{-1} = \\
&\qquad = H \circ Q \circ (H^{-1} \circ H) \circ P \circ H^{-1} = (H \circ Q \circ H^{-1}) \circ (H \circ P \circ H^{-1}).
\end{aligned}$$

Из предложения 1 следует, что если мы умеем находить все многочлены, коммутирующие с некоторым данным многочленом P, то мы умеем также находить и все многочлены, коммутирующие с любым сопряженным с P многочленом. Иными словами, задачу нахождения всех многочленов, коммутирующих с данным, достаточно решить для одного представителя каждого класса сопряженности.

Естественно выяснить, насколько можно упростить общий вид многочлена с помощью сопряжения.

Лемма 1. *Для любого многочлена степени $n \geqslant 2$ существует сопряженный ему многочлен со старшим коэффициентом единица и нулевым коэффициентом при $(n-1)$-й степени.*

Доказательство. Сопряжем многочлен

$$P(x) = Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots,$$

где многоточие означает члены степени ниже $n-1$, линейным двучленом $H(x) = ax + b$. Имеем

$$\begin{aligned} P_H(x) &= a\left(A\left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}\right)^n + B\left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}\right)^{n-1} + \ldots\right) + b = \\ &= \frac{A}{a^{n-1}}x^n + \left(-\frac{nAb}{a^{n-1}} + \frac{B}{a^{n-2}}\right)x^{n-1} + \ldots \end{aligned}$$

Приравнивая старший коэффициент полученного многочлена единице, получаем уравнение $a^{n-1} = A$, откуда находим a. Далее, приравнивая следующий коэффициент нулю, получаем линейное уравнение на b, из которого находим $b = \dfrac{aB}{nA}$.

Замечание. Мы предполагаем, что коэффициенты рассматриваемых многочленов — комплексные числа. Если рассматривать многочлены с действительными коэффициентами, то предложение остается справедливым лишь для четных n; при нечетных n верно несколько более слабое утверждение относительно старшего коэффициента — сопряжением его можно сделать равным 1 или -1.

Следствие. *Любой многочлен $ax^2 + bx + c$ второй степени сопряжен многочлену $x^2 - \alpha$, где $\alpha = \dfrac{3}{4}b^2 - \dfrac{1}{2}b - ac$.*

2. Единственность коммутирующего многочлена данной степени

Предложение 2. *Для данного целого положительного числа существует не более одного многочлена Q степени n, коммутирующего с данным многочленом P степени 2.*

Доказательство. Согласно предложению 1 и лемме 1, достаточно привести доказательство для случая $P(x) = x^2 - \alpha$. Пусть

$$Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \text{ где } a_0 \neq 0.$$

Тогда композиции многочленов P и Q (в одном и другом порядке) суть многочлены степени $2n$

$$P \circ Q(x) = b_0x^{2n} + b_1x^{2n-1} + b_2x^{2n-2} + \cdots + b_{2n-1}x + b_{2n},$$

$$Q \circ P(x) = c_0 x^{2n} + c_1 x^{2n-1} + c_2 x^{2n-2} + \dots + c_{2n-1} x + c_{2n},$$

их коэффициенты b_i и c_i являются функциями от коэффициентов α и a_i многочленов P и Q. Будем приравнивать коэффициенты этих многочленов начиная со старшего члена. Нетрудно найти явные выражения для старших коэффициентов: $b_0 = a_0^2$, $c_0 = a_0$. Получаем $a_0^2 = a_0$, откуда $a_0 = 1$. Таким образом, старший коэффициент многочлена Q определен однозначно. Применим метод математической индукции. Предположим, что все коэффициенты a_i с номерами $i < k$ для некоторого $0 < k \leqslant n$ уже определены. Докажем, что коэффициент a_k определяется при этом однозначно. Выражение для коэффициента b_k имеет вид $b_k = a_k a_0 + \dots$, где многоточие заменяет выражение, зависящее только от коэффициентов a_i с номерами $i < k$. Коэффициент же c_k зависит только от коэффициентов a_i с номерами $i \leqslant [k/2]$ (тем самым, $i < k$) и, быть может, от α. Тем самым, уравнение $b_k = c_k$ представляет собой линейное соотношение на a_k, из которого этот коэффициент однозначно выражается через α и уже выраженные коэффициенты a_i $(i < k)$.

Таким образом, из системы уравнений $b_i = c_i$ при $0 \leqslant i \leqslant n$ мы однозначно определим числа $a_0, a_1, \dots, a_n$. Если полученные числа будут удовлетворять соотношениям $b_i = c_i$ при $n+1 \leqslant i \leqslant 2n$, то они и будут коэффициентами единственного многочлена Q степени n, коммутирующего с P. В противном случае такого многочлена не существует.

Следствие 1. *Пусть P — многочлен степени 2. Тогда для любого целого неотрицательного числа k существует единственный многочлен степени 2^k, коммутирующий с P.*

Доказательство. Многочлен P^k будет, очевидно, обладать требуемыми свойствами. Единственность непосредственно вытекает из предложения 2.

Следствие 2. *Многочлены, коммутирующие с x^2, — это многочлены x^n $(n = 1, 2, \dots)$ и только они.*

Доказательство. Очевидно, что любой многочлен вида x^n коммутирует с x^2. Поскольку степени таких многочленов составляют все множество натуральных чисел, отсутствие других коммутирующих с x^2 многочленов следует из предложения.

Приведенное доказательство предложения 2 без труда переносится и на случай, если P — многочлен степени выше второй, всюду, кроме однозначности определения старшего коэффициента многочлена Q. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Предложение 3. *Пусть P — многочлен степени $m \geqslant 2$. Существует не более одного многочлена Q данной степени n с данным старшим коэффициентом a, коммутирующего с P. Старший член многочлена Q может принимать не более чем $m-1$ значение.*

Доказательство. Пусть

$$P(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m,$$

$$Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n.$$

Приравнивая старшие коэффициенты многочленов $P \circ Q$ и $Q \circ R$, получаем $A_0a_0^m = a_0A_0^n$, откуда $a_0^{m-1} = A_0^{n-1}$, следовательно, a_0 может принимать не более $m-1$ различных значений.

Каждый следующий коэффициент a_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ многочлена $Q(x)$ выражается однозначно через ранее определенные коэффициенты a_i $(0 \leqslant \leqslant i < k)$ и коэффициенты A_i многочлена $P(x)$ из сравнения коэффициентов при $(mn-k)$-й степени многочленов $P \circ Q$ и $Q \circ P$. Действительно, коэффициент при x^{mn-k} многочлена $P \circ Q(x)$ зависит от a_k линейно (и не зависит от a_i с номерами $i > k$), а коэффициент при x^{mn-k} многочлена $Q \circ P(x)$ не зависит от a_i при $i \geqslant k$.

Предложение 4. *Пусть P — многочлен с действительными (рациональными) коэффициентами, Q — коммутирующий с ним многочлен. Пусть при этом выполнено одно из двух условий:*
а) $\deg P = 2$*;*
б) старший коэффициент многочлена Q является действительным (рациональным) числом.
Тогда все коэффициенты многочлена Q действительны (рациональны).

Доказательство. Формулы, выражающие коэффициенты многочлена Q в доказательствах предложений 2 и 3, не выводят за рамки действительных (рациональных) чисел.

3. Транзитивность коммутирования

Начнем с простого, но очень важного свойства, позволяющего, имея примеры коммутирующих многочленов, строить новые.

Предложение 5. *Если многочлены Q и R коммутируют с одним и тем же многочленом P, то композиция $Q \circ R$ тоже коммутирует с P.*

Доказательство. Доказательство следует из цепочки равенств

$$(Q \circ R) \circ P = \\ = Q \circ (R \circ P) = Q \circ (P \circ R) = (Q \circ P) \circ R = (P \circ Q) \circ R = \\ = P \circ (Q \circ R).$$

Предложение 6. *Если многочлены Q и R коммутируют с многочленом P второй степени, то они коммутируют между собой.*

Доказательство. Из предложения 5 следует, что многочлены $Q \circ R$ и $R \circ Q$ коммутируют с P. Поскольку эти многочлены имеют одинаковую степень, из предложения 2 следует, что они равны.

Замечание. Если степень многочлена выше второй, то предложение перестает быть справедливым. Так, многочлены x^2 и $-x$ коммутируют с x^3, но не коммутируют между собой. Однако, если дополнительно предположить, что все три многочлена P, Q и R *унитарны*, т. е. имеют старший коэффициент единица, то предложение останется в силе для многочлена P любой степени выше первой.

4. Четные и нечетные многочлены

Напомним, что функция $f(x)$ называется *четной*, если для любого x выполняется равенство $f(-x) = f(x)$ и *нечетной*, если выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$. Нетрудно доказать, что для многочлена условие четности равносильно тому, что все коэффициенты при нечетных степенях равны нулю, а условие нечетности тому, что все коэффициенты при четных степенях равны нулю. Это означает, что любой четный многочлен может быть представлен в виде $Q(x^2)$, где Q — некоторый многочлен. Аналогично, нечетный многочлен может быть представлен в виде $xQ(x^2)$.

Напомним также одно простое, но очень важное свойство многочленов, которое будет использоваться нами неоднократно.

Лемма 2. *Если значения двух многочленов совпадают при бесконечно многих значениях аргумента, то эти многочлены тождественно равны.*

Доказательство. Разность рассматриваемых многочленов имеет бесконечно много корней. Так как ненулевой многочлен может иметь различных корней не больше, чем его степень, то эта разность является нулевым многочленом. Значит, рассматриваемые многочлены равны.

Предложение 7. *Любой многочлен $Q(x)$, коммутирующий с многочленом $P(x) = x^2 - \alpha$, является либо четным, либо нечетным.*

Доказательство. Поскольку многочлен $P(x)$ является четным, имеем

$$P(Q(-x)) = P \circ Q(-x) = Q \circ P(-x) = Q \circ P(x) = P \circ Q(x) = P(Q(x)).$$

Равенство $P(x_1) = P(x_2)$ означает $x_1^2 - \alpha = x_2^2 - \alpha$, откуда следует $x_1 = \pm x_2$. Взяв $x_1 = Q(-x)$, $x_2 = Q(x)$, получаем $Q(-x) = \pm Q(x)$. Последнее равенство справедливо для любого x. Значит, для бесконечно многих значений x имеет место либо равенство $Q(-x) = Q(x)$, либо равенство $Q(-x) = -Q(x)$. Согласно лемме 2, если первое из этих равенств выполняется для бесконечно многих значений x, то $Q(-x) \equiv Q(x)$, значит многочлен $Q(x)$ четный, а если второе, то $Q(-x) \equiv -Q(x)$, и многочлен $Q(x)$ нечетный.

Предложение 8. *Пусть Q — многочлен степени $2n$, коммутирующий с многочленом $P(x) = x^2 - \alpha$. Тогда многочлен Q можно представить в виде $Q = Q' \circ P$, где Q' — многочлен степени n, коммутирующий с P.*

Доказательство. Из предложения 7 следует, что многочлен $Q(x)$ может быть представлен как многочлен от x^2. Сделав линейную замену переменных, получаем $Q(x) = Q'(P(x))$, где Q' — многочлен степени n. Докажем, что многочлен $Q'(x)$ коммутирует с $P(x)$. Пусть $y = P(x)$. Тогда

$$P \circ Q'(y) = P \circ Q' \circ P(x) = P \circ Q(x) = Q \circ P(x) = Q' \circ P \circ P(x) = Q' \circ P(y).$$

Значения многочленов $P \circ Q'$ и $Q' \circ P$ совпадают при всех значениях аргумента из области значений многочлена $P(x)$, значит, согласно лемме 2, они тождественно равны.

Таким образом, для решения задачи классификации многочленов, коммутирующих с данным многочленом второй степени, достаточно найти все коммутирующие с ним многочлены нечетной степени.

5. Цепочки коммутирующих многочленов. Многочлены Чебышёва

Предложение 9. *Для любого натурального числа n существует многочлен $P_n(x)$ степени n такой, что справедливо тождество*

$$P_n(t+t^{-1}) = t^n + t^{-n}.$$

Многочлены $P_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ попарно коммутируют.

Доказательство. Существование таких многочленов будем доказывать индукцией по n. Нетрудно проверить, что при $n = 1$ и 2 многочлены $P_1(x) = x$ и $P_2(x) = x^2 - 2$ являются искомыми. Предположим, что мы нашли такие многочлены $P_n(x)$ для всех $n \leqslant k$. Тогда, воспользовавшись тождеством

$$t^{k+1} + t^{-(k+1)} = (t+t^{-1})(t^k + t^{-k}) - (t^{k-1} + t^{-(k-1)}),$$

получаем, что многочлен $P_{k+1}(x) = xP_k(x) - P_{k-1}(x)$ будет искомым при $n = k+1$.

Докажем теперь, что многочлены P_n попарно коммутируют. Пусть $x = t + t^{-1}$. Тогда

$$P_m \circ P_n(x) = P_m(t^n + t^{-n}) = t^{mn} + t^{-mn} = P_n(t^m + t^{-m}) = P_n \circ P_m(x).$$

Поскольку чисел, представимых в виде $t+t^{-1}$, бесконечно много, согласно лемме 2, многочлены $P_m \circ P_n$ и $P_n \circ P_m$ равны.

Следствие. *Все многочлены, коммутирующие с многочленом $x^2 - 2$, суть многочлены $P_n(x)$ из предложения 9.*

Доказательство. Среди многочленов P_n имеется по одному многочлену каждой степени. Значит, согласно предложению 2, других коммутирующих с $x^2 - 2$ многочленов нет.

Еще одну цепочку попарно коммутирующих многочленов можно получить следующим образом. При любом натуральном n существует такой многочлен T_n, что справедливо тождество

$$\cos nx = T_n(\cos x). \tag{2}$$

Эти многочлены называют *многочленами Чебышёва.* Из формулы (2) легко вывести, что эти многочлены попарно коммутируют. Известные тригонометрические формулы дают явные выражения для нескольких первых многочленов Чебышёва:

$$\begin{aligned} T_1(x) &= x, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 3x^3 - 4x. \end{aligned}$$

Однако цепочки многочленов P_n и многочленов Чебышёва фактически являются одним примером — одна получается из другой с помощью сопряжения многочленом $2x$. Доказать это можно многими способами, самый простой из них, пожалуй, — воспользоваться известной формулой

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

При нечетных n, аналогично приведенным выше многочленам P_n и T_n, можно построить многочлены P'_n и T'_n, определяемые равенствами

$$P'_n(t - t^{-1}) = t^n - t^{-n}$$

и

$$\sin nx = T'_n(\sin x).$$

Однако, и эти серии многочленов отличаются от своих «родственников» P_n и T_n лишь применением сопряжения. Правда, в этом случае сопрягать нужно многочленом $H(x) = ix$ с комплексными коэффициентами. Тем не менее для нечетных n полученный при сопряжении многочлен будет иметь только действительные коэффициенты.

Фактически, не существует примеров коммутирующих многочленов, отличных от приведенных. Основной классификационный результат [1, 2, 3, 4] утверждает, что любая пара унитарных коммутирующих многочленов сопряжением приводится либо к виду (P^n, P^m) для некоторого многочлена P и целых неотрицательных чисел n и m, либо к виду (x^n, x^m) для некоторых целых неотрицательных чисел n и m, либо к паре многочленов Чебышёва. Для случая, когда степень одного из многочленов равна двум, элементарное доказательство этого факта будет приведено в параграфе 8.

6. Неподвижные точки

В этом параграфе изучается важный инструмент для исследования коммутирующих многочленов — метод неподвижных точек. И хотя формально полученные здесь результаты, касающиеся задачи классификации для многочленов второй степени, перекрываются результатами восьмого параграфа, изучение неподвижных точек многочленов позволяет яснее понять ситуацию. Кроме того, в следующем параграфе этот метод применяется для решения задачи классификации коммутирующих многочленов для некоторого класса кубических многочленов.

Корни уравнения $P(x) = x$ мы называем *неподвижными точками* многочлена P. Связь неподвижных точек с коммутирующими многочленами видна из следующего утверждения.

Предложение 10. *Пусть λ — неподвижная точка многочлена P, многочлен Q коммутирует с P. Тогда $Q(\lambda)$ — тоже неподвижная точка многочлена P.*

Доказательство. $P(Q(\lambda)) = P \circ Q(\lambda) = Q \circ P(\lambda) = Q(P(\lambda)) = Q(\lambda)$.

Число x_0 будем называть *периодическим* относительно многочлена $P(x)$, если последовательность, заданная рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = P(x_n) \ (n = 1, 2, \dots), \tag{3}$$

периодическая.

Многочлен будем называть *периодическим*, если нуль — периодическое относительно него число.

Предложение 11. *Пусть $P(x) = x^2 - \alpha$ — непериодический многочлен. Не существует коммутирующих с ним многочленов нечетной степени, кроме тождественного.*

Доказательство. Пусть $Q(x)$ — многочлен нечетной степени, коммутирующий с $P(x)$. Из предложения 7 следует, что $Q(x)$ является нечетным многочленом, значит, его свободный член равен нулю, поэтому нуль является его неподвижной точкой. Из предложения 10 следует, что любой член последовательности (3) при $x_0 = 0$ является неподвижной точкой многочлена $Q(x)$. Это означает, что многочлен $Q(x) - x$ имеет бесконечно много корней, что возможно только для $Q(x) \equiv x$.

Следующее простое утверждение позволяет во многих случаях доказывать непериодичность.

Лемма 3. *Если последовательность имеет строго монотонную подпоследовательность (в частности, если она сама монотонна), то она не может быть периодической.*

Доказательство. Действительно, периодическая последовательность может принимать лишь конечное число различных значений, а монотонная последовательность принимает бесконечное число различных значений.

Предложение 12. *Многочлен $x^2-\alpha$ является непериодическим в каждом из следующих трех случаев (в пунктах а) и в) α считается действительным числом, а в пункте б) — комплексным):*

а) $\alpha < 0$;

б) $|\alpha| \geqslant 2$, $\alpha \neq 2$;

в) $0 < \alpha < 1$.

Доказательство. Докажем непериодичность последовательности x_n, заданной формулами $x_0 = 0$, $x_{n+1} = x_n^2 - \alpha$. Будем пользоваться при этом утверждением леммы 3.

а) Последовательность x_n монотонно возрастает. Действительно, $x_0 = 0 < -\alpha = x_1$. Если $0 \leqslant x_{k-1} < x_k$, то неравенство $x_k < x_{k+1}$ следует из монотонности многочлена $x^2 - \alpha$ на множестве положительных чисел.

б) Нам достаточно доказать непериодичность последовательности $|x_n|$, поскольку если последовательность периодична, то последовательность модулей ее членов тоже периодична. Докажем по индукции, что последовательность $|x_n|$ строго возрастает.

База индукции. Воспользуемся неравенством треугольника и неравенством $\alpha \geqslant 2$. Имеем $|\alpha - 1| \geqslant |\alpha| - 1 \geqslant 1$. Равенство в первом случае выполняется, если α — положительное действительное число, а во втором — если $|\alpha| = 2$. Поэтому мы имеем строгое неравенство $|\alpha - 1| > 1$. Умножив его на $|\alpha|$, получаем $|\alpha^2 - \alpha| > |\alpha|$ или $|x_2| > |x_1|$.

Шаг индукции. Из предположения индукции $(x_k > x_{k-1})$ нам нужно воспользоваться лишь тем, что $|x_k| > |\alpha|$. Тогда $|x_k| - 1 > 1$. Перемножив два последних равенства, получаем $|x_k|^2 - |x_k| > |\alpha|$ или $|x_k^2| - |\alpha| > |x_k|$. Применив неравенство треугольника, имеем $|x_k^2 - \alpha| > |x_k|$, что и означает $|x_{k+1}| > |x_k|$.

в) Последовательность x_n распадается на две монотонные подпоследовательности — возрастающую подпоследовательность с нечетными номерами и убывающую с четными. Неравенства $x_{n+2} < x_n$ (при четном n) и $x_{n+2} > x_n$ (при нечетном n) доказываются индукцией по n одновременно.

База индукции ($n = 0$). Неравенство $x_2 = \alpha(\alpha - 1) < 0 = x_0$ следует из того, что $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Шаг индукции. Поскольку $x_n \leqslant 0$ для всех n, а на множестве неотрицательных чисел многочлен $x^2 - \alpha$ монотонно убывает, из неравенства

$x_{k+2} > x_k$ следует $x_{k+3} < x_{k+1}$, и наоборот, из неравенства $x_{k+2} < x_k$ следует $x_{k+3} > x_{k+1}$.

Предложение 13. *Если α — периодическое рациональное число, то оно целое.*

Доказательство. Если число α рационально, то, очевидно, вся последовательность x_n, определенная по формулам (3) при $x_0 = 0$, состоит из рациональных чисел. Знаменатель каждого члена последовательности, начиная с x_1 (если представить его в виде несократимой дроби), равен квадрату знаменателя предыдущего члена. Значит, если α нецелое, то последовательность знаменателей строго возрастает, поэтому последовательность не может быть периодической.

Периодичность многочлена $x^2 - \alpha$ является достаточным, но не необходимым, условием отсутствия коммутирующих с ним многочленов нечетной степени (кроме тождественного).

Предложение 14. *Не существует многочленов нечетной степени выше первой, коммутирующих с $x^2 - 1$.*

Доказательство. Пусть $Q(x)$ — многочлен нечетной степени выше первой, коммутирующий с $P(x) = x^2 - 1$. Рассмотрим уравнение

$$Q(x) = P(x) \tag{4}$$

и некоторый его корень λ. Из равенства

$$Q(P(\lambda)) = P(Q(\lambda)) = P(P(\lambda))$$

следует, что $P(\lambda)$ — тоже его корень. Значит, λ — периодическое число относительно многочлена P. Опишем все такие числа. Обозначим $\varphi_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ — корни многочлена $x^2 - x - 1$ (неподвижные точки многочлена P).

Если $|x_0| > \varphi_1$, то последовательность (3) монотонно возрастает. Действительно, $x_{n+1} = P(x_n) > |x_n|$, так как

$$P(x_n) - |x_n| = x_n^2 - |x_n| - 1 = (|x_n| - \varphi_1)(|x_n| - \varphi_2) > 0.$$

Поэтому числа, большие φ_1, не являются периодическими относительно P.

Пусть теперь $|x_0| < \varphi_1$. Если $x_0 < 0$, то изменим его знак (при этом остальные члены последовательности не изменятся), поэтому можно считать, что $0 < x_0 < \varphi_1$. Начиная с некоторого номера, последовательность x_n попадет внутрь отрезка $[-1, 0]$, поскольку если бы все члены последовательности были положительны, то она была бы монотонно убывающей. Действительно, $x_{n+1} = P(x_n) < x_n$, так как $\varphi_2 < x_n < \varphi_1$, и поэтому

$$P(x_n) - x_n = x_n^2 - x_n - 1 = (x_n - \varphi_1)(x_n - \varphi_2) < 0.$$

Но тогда по теореме Больцано–Вейерштрасса последовательность x_n имела бы предел, принадлежащий полуинтервалу $[0, \varphi_1)$. Однако пределом последовательности, определенной рекуррентным соотношением (3), может быть только корень уравнения $P(x) = x$, а его на указанном полуинтервале нет.

Если член x_k последовательности, лежащий в интервале $[-1, 0]$ не является его концом или не совпадает с φ_2, то последовательность x_n непериодична, так как ее подпоследовательности с четными и нечетными номерами (начиная с k-го) монотонны. Действительно, $x_{n+2} = P^2(x_n)$. Так как

$$P^2(x) - x = (x+1)(x - \varphi_2)x(x - \varphi_1),$$

то $P^2(x) < x$ при $-1 < x < \varphi_2$ и $P^2(x) > x$ при $-1 < x < \varphi_2$. Поэтому если $x_n \in [-1, \varphi_2]$, то $x_{n+2} \in [-1, \varphi_2]$ и $x_{n+2} < x_n$, а если $x_n \in [\varphi_2, 0]$, то $x_{n+2} \in [\varphi_2, 0]$ и $x_{n+2} > x_n$.

Поэтому действительными корнями уравнения (4) могут быть только те числа, которые при многократном применении многочлена P переходят в φ_1 или φ_2 (числа, переходящие в 0 или -1, не подходят, так как 0 не является корнем (4)). Пусть x_n — первый член последовательности, равный φ_i ($i = 1$ или 2). Тогда $x_{n-1} = -\varphi_i$, так как $P(x) = \varphi \Leftrightarrow x = \pm\varphi$. Однако равенства $P(\varphi_i) = Q(\varphi_i)$ и $P(-\varphi_i) = Q(-\varphi_i)$ одновременно выполняться не могут, поскольку P — четный многочлен, Q — нечетный, а $P(\varphi_i) \neq 0$. Поэтому φ_1 и φ_2 — единственные возможные корни (4).

По предложению 4 уравнение (4) имеет рациональные коэффициенты, поэтому корни φ_1 и φ_2 должны иметь одинаковую кратность. Последнее противоречит тому, что уравнение нечетной степени должно иметь нечетное количество действительных корней.

В восьмом параграфе будет доказано, что единственные приведенные многочлены второй степени, для которых существуют нетождественные коммутирующие многочлены нечетной степени, — это x^2 и $x^2 - 2$.

7. Кубические многочлены

В этом параграфе мы перечислим все многочлены, коммутирующие с многочленом вида $x^3+\alpha$. (Напомним, что сопряжением любой кубический многочлен приводится к виду $x^3+\beta x+\alpha$.)

Предложение 15. *Пусть $P(x) = x^3+\alpha$ (α — ненулевое действительное число). Все коммутирующие с $P(x)$ многочлены суть $P^n(x)$.*

Доказательство. Аналогично предложению 7 докажем, что любой коммутирующий с $P(x)$ многочлен $Q(x)$ содержит ненулевые коэффициенты только при степенях x, дающих при делении на 3 одинаковые остатки. Иными словами, $Q(x)$ имеет один из видов $Q'(x^3)$, $xQ'(x^3)$ или $x^2Q'(x^3)$. Пусть ξ — отличный от единицы (комплексный) кубический корень из единицы. Тогда $P(\xi x) = P(x)$ для любого x. Имеем

$$P(Q(\xi x)) = Q(P(\xi x)) = Q(P(x)) = P(Q(x)),$$

откуда $Q(\xi x)^3 = Q(x)^3$, значит,

$$0 = Q(x)^3 - Q(\xi x)^3 = (Q(\xi x) - Q(x))(Q(\xi x) - \xi Q(x))(Q(\xi x) - \xi^2 Q(x)).$$

Тем самым справедливо одно из равенств:

$$Q(\xi x) = Q(x), \tag{5}$$
$$Q(\xi x) = \xi Q(x), \tag{6}$$
$$Q(\xi x) = \xi^2 Q(x). \tag{7}$$

Поскольку одно из этих равенств справедливо для бесконечно многих значений x, оно справедливо при всех x. Представим $Q(x)$ в виде

$$Q(x) = Q_0(x^3) + xQ_1(x^3) + x^2Q_2(x^3).$$

Тогда

$$Q(\xi x) = Q_0(x^3) + \xi x Q_1(x^3) + \xi^2 x^2 Q_2(x^3).$$

Если справедливо равенство $Q(\xi x) = Q(x)$, то $Q_1 = Q_2 \equiv 0$, и многочлен $Q(x)$ имеет ненулевые коэффициенты лишь при степенях, делящихся на 3. Если справедливо равенство $Q(\xi x) = \xi Q(x)$, то $Q_0 = Q_2 \equiv 0$, и многочлен $Q(x)$ имеет ненулевые коэффициенты лишь при степенях, дающих при делении на 3 остаток 1. Соответственно, равенство $Q(\xi x) = \xi x^2 Q(x)$ означает, что $Q_0 = Q_1 \equiv 0$ и многочлен $Q(x)$ имеет ненулевые коэффициенты лишь при степенях, дающих при делении на 3 остаток 2.

Далее так же, как и в предложении 8, показывается, что любой многочлен Q степени $3n$, коммутирующий с P, имеет вид $Q' \circ P$, где Q' — многочлен степени n, тоже коммутирующий с P.

Задача свелась к нахождению многочленов степени не кратной трем, коммутирующих с P. Непосредственно проверяется, что тождественный многочлен является единственным таким многочленом первой степени (проверка здесь необходима, поскольку теорема 3 утверждает лишь, что таких многочленов не больше двух), значит, $P^n(x)$ — единственный коммутирующий многочлен степени 3^n. Из этого следует, что если мы найдем все многочлены степени n, коммутирующие с P, то мы тем самым найдем все многочлены степеней $3^k n$, коммутирующие с P.

Осталось доказать, что многочлен P не имеет коммутирующих многочленов степени выше первой и не кратной трем.

Пусть Q — такой многочлен. Тогда его свободный член равен нулю (действительно, его ненулевые коэффициенты могут быть только при степенях, дающих одинаковые остатки при делении на 3, а старшая степень на 3 не делится), поэтому нуль является корнем уравнения $Q(x) = x$. Из предложения 10 следует, что многочлен P должен быть периодическим. С другой стороны, из монотонности многочлена P следует монотонность последовательности x_n, определенной по формуле (3) при $x_0 = 0$ (она убывающая при $\alpha < 0$ и возрастающая при $\alpha > 0$). Из леммы 3 следует, что эта последовательность непериодична, а значит, непериодичен и многочлен P. Получаем противоречие.

Предложение 16. *Все многочлены, коммутирующие с x^3, — это $\pm x^n$ $(n = 1, 2, \dots)$.*

Доказательство. Легко проверить, что все эти многочлены коммутируют с x^3. Этих многочленов имеется по два каждой степени. Согласно предложению 3, других коммутирующих с x^3 многочленов нет.

8. Классификация многочленов, коммутирующих с квадратными многочленами

Лемма 4. *Существует единственный (с точностью до умножения на -1) многочлен F данной степени n такой, что многочлен $(x+1)F(x)^2 - 1$ является нечетным.*

Доказательство. Пусть $F(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots$ $(a \neq 0)$ — многочлен степени $n \geqslant 1$, удовлетворяющий условиям леммы. Тогда

$$(x+1)F(x)^2 - 1 = a^2 x^{2n+1} + (2ab + a^2)x^n + \dots$$

Приравниваем нулю коэффициент при $2n$-й степени, получаем $a = -2b$, в частности, $b \neq 0$.

Разложим F в сумму четной и нечетной компонент:

$$F(x) = U(x^2) + xV(x^2),$$

тогда условие леммы можно записать в виде

$$U(t)^2 + 2tU(t)V(t) + tV(t)^2 = 1 \tag{8}$$

(мы обозначили $t = x^2$). Обозначим старший коэффициент многочлена $U(t)$ через u_0, а многочлена $V(t)$ — через v_0. Тогда если n четно, то $u_0 = a$, $v_0 = b$, значит, $u_0 = -2v_0$ и $\deg U = \deg V + 1 = n/2$; а если n нечетно, то $u_0 = b$, $v_0 = a$, значит, $v_0 = -2u_0$ и $\deg U = \deg V = (n-1)/2$.

Непосредственно проверяется, что если (U, V) — решение уравнения (8), то $(U + 2tV, -2U + (1-4t)V)$ и $((1-4t)U - 2tV, 2U + V)$ — тоже решения. Таким образом, мы имеем два отображения Φ_+ и Φ_- соответственно на множестве всех многочленов. Эти отображения переводят многочлены, удовлетворяющие условию леммы, в многочлены, также ему удовлетворяющие. Поэтому будем их рассматривать только на множестве таких многочленов.

Если степень многочлена четна (и не равна нулю), то отображение Φ_+ понижает ее. Действительно, из условий $u_0 = -2v_0$ и $\deg U = \deg V + 1$ следует, что $\deg(U + 2tV) < \deg U$ и $\deg(-2U + (1-4t)V) \leqslant \deg V$. Аналогично, отображение Φ_- понижает степень многочлена, если она нечетна.

На самом деле эти отображения (при $n \geqslant 2$) понижают степень многочлена на 2. Действительно, легко проверить, что описанные отображения Φ_+ и Φ_- являются взаимно обратными. Пусть F — многочлен нечетной степени (напомним, что мы рассматриваем только многочлены, удовлетворяющие условию леммы). Тогда $\Phi_-(F)$ — тоже многочлен нечетной степени. В противном случае получаем противоречие

$$\deg F = \deg \Phi_+(\Phi_-(F)) < \deg \Phi_+(F) < \deg F.$$

Поэтому отображение Φ_- понижает степень многочлена по крайней мере на 2. Больше, чем на 2 степень понизится не может, поскольку обратное отображение Φ_+ не может повысить степень многочлена более, чем на 2 (это следует из явного выражения для Φ_+). Аналогично рассматривается случай многочлена F четной степени.

Таким образом, применяя многократно к многочлену F, удовлетворяющему условию леммы, преобразования Φ_+ или Φ_- (в зависимости от четности его степени), мы получим многочлен, удовлетворяющий условию леммы, первой или нулевой степени. Значит, любой такой многочлен F может быть получен из многочлена первой или нулевой степени многократным применением обратного преобразования. Непосредственное вычисление показывает, что искомые многочлены нулевой и первой степени — это только ± 1 и $\pm(2t-1)$. Значит, для любой степени такой многочлен единствен с точностью до умножения на -1.

Предложение 17. *Для любого (комплексного) числа $\alpha \neq 0$ или 2 не существует многочлена нечетной степени выше первой, коммутирующего с $P(x) = x^2 - \alpha$.*

Доказательство. Пусть $Q(x)$ — многочлен степени $2n+1$ $(n \geqslant 1)$, коммутирующий с $P(x)$. Из предложения 7 следует, что

$$Q(x) = xQ'(x^2),$$

где $Q'(x)$ — многочлен степени n со старшим коэффициентом 1. Условие коммутирования многочленов запишем в виде

$$x^2 Q'(x^2)^2 = P(x)Q'(P(x)^2) + \alpha.$$

Предположим, что $\alpha \neq 0$, и введем обозначение $y = \dfrac{P(x)}{\alpha}$, тогда $x^2 = \alpha(y+1)$. Имеем

$$(y+1)Q'(\alpha y + \alpha)^2 = yQ'((\alpha y)^2) + 1.$$

Обозначим далее $F(y) = Q'(\alpha y + \alpha)$ и $G(y) = Q'(\alpha y)$. Степень многочлена F равна n, а старший коэффициент равен α^n. Получаем

$$(y+1)F(y)^2 = yG(y^2) + 1. \tag{9}$$

Возьмем в качестве $Q(x)$ многочлен $P_n(x)$, коммутирующий с $x^2 - 2$, из предложения 9. В этом случае старший коэффициент многочлена F равен 2^n. Поскольку в силу (9) многочлен F удовлетворяет условиям леммы 4, для любого другого многочлена $Q(x)$ мы получим тот же самый многочлен F, быть может, умноженный на -1. Это возможно только если $\alpha^n = \pm 2^n$. Значит, $|\alpha| = 2$. Однако в этом случае воспользуемся предложением 12 б) — многочлен $x^2 - \alpha$ является непериодическим, значит, не имеет коммутирующих нечетной степени выше первой.

Объединяя результаты следствия 2, предложения 2, предложения 9 и его следствия и предложений 8 и 17, получаем основную классификационную теорему.

Теорема. *Пусть $P(x) = x^2 - \alpha$. Тогда все многочлены, коммутирующие с $P(x)$, суть многочлены вида (n — целое неотрицательное число):*

- ▷ *x^n, если $\alpha = 0$;*
- ▷ *$P_n(x)$, определенные в предложении 9, если $\alpha = 2$;*
- ▷ *$P^n(x)$ в остальных случаях.*

С учетом предложения 1 и леммы 1, эта теорема полностью классифицирует все многочлены, коммутирующие с данным многочленом второй степени.

9. Коммутирующие рациональные функции

Как мы видели, случаи коммутирования многочленов очень редки. Приведем один способ построения примеров коммутирующих рациональных функций. Рассмотрим для этого кривую G, задаваемую соотношением $y^2 = x^3 + px + q$. График этой кривой для случая $p = 1$, $q = 0$ изображен на рис. 1.

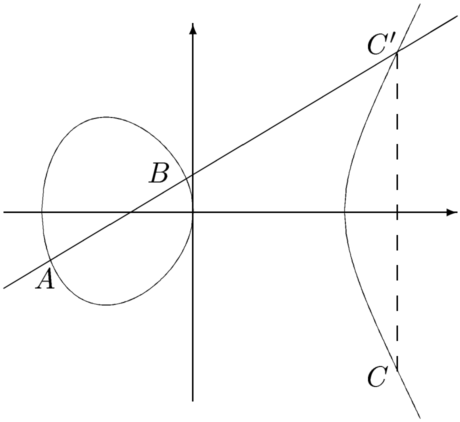


Рис. 1.

На кривой G введем операцию «сложения точек» следующим образом. Пусть две (не симметричные относительно оси абсцисс) точки A и B лежат на кривой G. Проведем через них секущую (или касательную в случае совпадения точек A и B). Она пересекает кривую G в точках A, B и в некоторой третьей точке C'. Действительно, уравнение этой (невертикальной) кривой будет иметь вид $y = kx + b$. Точки пересечения этой прямой с кривой G суть решения системы

$$\begin{cases} y^2 = x^3 + px + q, \\ y = kx + b. \end{cases}$$

Подставив в первое уравнение системы вместо y его значение из второго уравнения, получаем кубическое уравнение относительно x. Два (быть может, совпадающих) его корня — это абсциссы точек A и B. Третий корень будет абсциссой искомой точки C'. Ордината точки C' однозначно находится из второго уравнения системы. Суммой точек A и B называется точка C, симметричная точке C' относительно оси абсцисс.

Если точки A и B симметричны относительно оси абсцисс, то их суммой считается добавленная к кривой G бесконечно удаленная точка. Суммой любой точки A и бесконечно удаленной точки считается сама точка A.

Лемма 5. *Введенная операция сложения точек на кривой G является ассоциативной.*

Мы не будем приводить доказательства этой леммы, его можно найти во многих книгах, в частности [6, 7]. Как следствие леммы 5 получаем, что для любой точки A корректно определена точка $nA = \underbrace{A + A + \dots + A}_{n \text{ слагаемых}}$. Рассмотрим множество функций F_n определенных равенствами $F_n(x_A) = x_{nA}$ (через x_A и x_{nA} обозначены абсциссы точек A и nA соответственно).

Предложение 18. *Функции F_n являются попарно коммутирующими рациональными функциями.*

Доказательство. Коммутирование функций F_i доказывается просто. Пусть $x = x_A$ для некоторой точки $A \in G$. Тогда

$$F_m \circ F_n(x) = F_m(x_{nA}) = x_{mnA} = F_n(x_{mA}) = F_n \circ F_m(x).$$

Рациональность будем доказывать индукцией по n. Одновременно будем доказывать, что квадрат углового коэффициента k_n прямой, проходящей через точки x_A и x_{nA}, является рациональной функцией от x_A.

База индукции. Очевидно, что $F_1 = \mathrm{id}$ — рациональная функция, а $k_1(x)$ — это производная $\dfrac{dy}{dx}$ функции, задающей кривую G. Поэтому

$$k_1(x) = \frac{(x^3 + px + q)'}{(y^2)'} = \frac{3x^2 + p}{2y},$$

$$k_1^2(x) = \frac{(3x^2 + p)^2}{4(x^3 + px + q)}.$$

Шаг индукции. Пусть $F_n(x)$ и $k_n^2(x)$ являются рациональными функциями от x. Точки A, nA и $-(n+1)A$ лежат на прямой $y = k_n(x_A)x + b$, значит, их абсциссы x_A, $x_{nA} = F_n(x_A)$ и $x_{-(n+1)A} = x_{(n+1)A} = F_{n+1}(x_A)$ являются корнями кубического уравнения $(k_n(x_A)x + b)^2 = x^3 + px + q$.

По теореме Виета $x_A + F_n(x_A) + F_{n+1}(x_A) = k_n(x_A)^2$. Поэтому $F_{n+1}(x) = k_n(x)^2 - F_n(x) - x$. Так как функции $F_n(x)$ и $k_n(x)^2$ рациональны по предположению индукции, то $F_{n+1}(x)$ — тоже рациональная функция.

Поскольку точки A, nA и $-(n+1)A$ лежат на одной прямой с угловым коэффициентом $k_n(x_A)$,

$$\begin{gathered} y_A - y_{nA} = k_n(x_A)(x_A - x_{nA}), \\ y_A + y_{(n+1)A} = k_n(x_A)(x_A - x_{(n+1)A}). \end{gathered}$$

С другой стороны, точки A и $(n+1)A$ лежат на прямой с угловым коэффициентом $k_{n+1}(x_A)$, поэтому

$$y_A - y_{(n+1)A} = k_{n+1}(x_A)(x_A - x_{(n+1)A}).$$

Перемножив два последних равенства, получаем

$$y_A^2 - y_{(n+1)A}^2 = k_n(x_A)k_{n+1}(x_A)(x_A - x_{(n+1)A})^2,$$

откуда следует

$$\begin{aligned} k_{n+1}(x_A) &= \frac{y_A^2 - y_{(n+1)A}^2}{(x_A - x_{(n+1)A})^2 k_n(x_A)} = \\ &= \frac{(x_A^3 + px_A + q) - (x_{(n+1)A}^3 + px_{(n+1)A} + q)}{(x_A - x_{(n+1)A})^2 k_n(x_A)} = \\ &= \frac{(x_A^2 + x_A x_{(n+1)A} + x_{(n+1)A}^2 + p)}{(x_A - x_{(n+1)A}) k_n(x_A)}. \end{aligned}$$

Значит,

$$k_{n+1}(x) = \frac{x^2 + xF_{n+1}(x) + F_{n+1}(x)^2 + p}{(x - F_{n+1}(x))k_n(x)}.$$

Возведя последнюю формулу в квадрат, из рациональности функций $k_n(x)^2$ (по предположению индукции) и $F_{n+1}(x)$ (доказанной выше) получаем рациональность $k_{n+1}(x)^2$.

В качестве упражнения предлагаем читателю найти явный вид функций $F_n(x)$ для нескольких значений n.

Список литературы

[1] *Ritt J.* Prime and Composite Polynomials // Trans. AMS. V. 23. 1922. P. 51–66.

[2] *Dorey F., Whaples G.* Prime and Composite Polynomials // J. Algebra. V. 28. 1972. P. 88–101.

[3] *Engstrom H. T.* Polynomial substitutions // Amer. J. Math. V. 63. 1941. P. 249–255.

[4] *Levi H.* Composite Polynomials with coeffitients in an arbitrary field of characteristic zero // Amer. J. Math. V. 64. 1942. P. 389–400.

[5] *Янтаров И.* Коммутирующие многочлены // Квант. №4. 1979. С. 19–23.

[6] *Прасолов В. В., Соловьев Ю. П.* Эллиптические функции. Специальный курс. М.: МК НМУ. 1993.

[7] *Рид М.* Алгебраическая геометрия для всех. М.: Мир. 1991.

Конкурсы и олимпиады

Турнир городов и математическая олимпиада

Н. Н. Константинов

1. Чем хорошо и чем плохо соревнование

Наука — это арена нескольких видов борьбы. Это — и борьба человечества с незнанием, и борьба ученых со своими заблуждениями, и стремление принести пользу людям, и поиск красоты мира, и стремление к славе, и делание собственной карьеры, и заработок. Чтобы наука жила полноценно, нужно, чтобы ее поддерживали различные стимулы — внутренние и внешние. Каждого ученого какой-то стимул подтолкнул в юности в сторону науки. И если этот стимул — антинаучный и низменный, большой беды в этом нет. Важно только, чтобы своевременно возникли другие стимулы, соответствующие высшему назначению науки.

Математические олимпиады используют в качестве стимула дух соперничества — в этом сила и слабость математических олимпиад. Сила потому, что в детском возрасте призыв посоревноваться находит отклик в душе почти каждого человека. Почти во всех детских играх есть соревнование. Этим и объясняется огромный успех олимпиад. Они настолько понравились, что за сто лет их существования стиль их проведения почти не изменился.

Школьники, которые увлеклись математикой и уже втянулись в олимпиады, стараются получить на них все более высокие результаты. Дух соревнования подталкивает их к максимальному напряжению всех сил при подготовке к олимпиаде и на самой олимпиаде. В одном из своих интервью Г. Каспаров сказал, что шахматам он обязан всем, что в нем есть хорошего. И на других соревнованиях, скажем, на Олимпийских играх, причиной огромного интереса зрителей является встреча с людьми в момент высшего состояния их мобилизованности. Умение достигать такого состояния очень важно и для математика.

В то же время вред духа соревнования очевиден. Прежде всего наука — поприще настолько широкое, что людям на нем никогда не будет тесно. Дух же соревнования сталкивает толпы людей на одну узкую тропинку. Человек в науке ценен своей уникальностью, между тем дух соревнования толкает людей подчиняться критериям прошлой эпохи и гнаться за чужой славой, стараясь ее повторить вместо того, чтобы найти свое уникальное место. Школьник, увлекшийся олимпиадами, тратит на них все годы своей учебы в старших классах. Даже если он достигает на них прекрасных результатов, их цена оказывается слишком высокой, так как на это уходит заметная часть его творческой жизни.

Организация олимпиад, включая национальные и международные олимпиады, подчинена духу соревнования, и, кроме вреда от самого духа соревнования, возникает дополнительный вред от этой подчиненности. Среди десятков тысяч участников этих олимпиад почти все (кроме нескольких десятков учащихся, попавших на международную олимпиаду) на каком-то этапе оказываются провалившимися. Это находится в противоречии с основной задачей олимпиад — активизации тяги способной молодежи к науке. Многоступенчатость олимпиад и их высокая престижность привели к возникновению особой профессии олимпиадчика — профессора по решению особого типа задач. Сам этот тип задач возник как следствие законсервированности стиля олимпиад. Некоторые олимпиадчики, в особенности провинциалы, с трудом переключаются на математику, имеющую научную ценность.

Олимпиады породили две противоположные традиции в подборе задач: научную и антинаучную. В соответствии с научной традицией для олимпиад сочиняются и подбираются красивые и занимательные задачи, в которых в концентрированном виде присутствуют яркие математические факты и идеи. Такие задачи надолго запоминаются. Они доставляют радость и школьникам, и учителям, и профессиональным математикам, и любителям разных красивых вещей, таких как шахматные этюды или головоломки. Хорошие олимпиадные задачи имеют и чисто научное значение — математики иногда формулируют новые интересные факты и связи в форме таких задач. Иногда эти задачи помогают по-новому посмотреть на давно известные вещи.

Антинаучная традиция породила многочисленные задачи-уроды, претендующие на оригинальность, но фактически назойливо повторяющие одни и те же математические фокусы. Команду школьников можно специально натренировать на задачи этого рода и добиться эффектных внешних результатов, но такая деятельность не имеет никакого отношения к пропаганде математики.

Все эти соображения привели организаторов Турнира городов к следующим компромиссам.

В правилах турнира принято оценивать работы участников только по трем лучшим из написанных ими задач (общее количество задач — 4–5 в тренировочном варианте и 6–7 в основном); при этом школьникам заранее сообщается оценка задачи в баллах (хотя априорные оценки не всегда оказываются удачными, они уже не изменяются после проверки). Как правило, это приводит к тому, что выделяется не один-два победителя, а целая группа. Таким правилом в значительной степени приглушается спортивный аспект соревнования, участники могут сосредоточить свои усилия на меньшем количестве задач и получить больше удовольствия от их решения.

Турнир городов проводится в один этап. Однако ученикам дается четыре попытки: имеется два тура — осенний и весенний, и в каждом тренировочный и основной варианты. Все четыре попытки открыты для всех учащихся. В зачет ученику идет наивысший из заработанных им баллов. Таким образом, работа ученика оценивается по его взлетам, а не по промахам. Высшие награды не подразделяются на степени (первая премия, вторая премия и т. д.), но в дипломе указывается общий заработанный балл.

Местный оргкомитет сам решает вопрос, стоит ли предоставлять учащимся города все четыре попытки. Вполне возможно, что в городе проводится много легких олимпиад и не хватает трудной. Возможно, что учащиеся города не подготовлены к трудной олимпиаде. Возможен и такой вариант, когда число проводимых в городе олимпиад уже велико, и проведение еще четырех принесет вред. Выбирая варианты, местный оргкомитет приспосабливает Турнир городов к условиям своего города.

Практика показывает, что участие в Турнире городов, благодаря приглушенности соревновательной компоненты, требует значительно меньшего нервного напряжения, чем участие в олимпиаде.

Турнир городов не предлагает участникам перспективы все более сложных соревнований. Правда, в Турнире можно участвовать до четырех лет подряд — пока ученик проходит четыре старших класса средней школы, или даже больше четырех лет, если ученик раньше начал участвовать в Турнире. Возможно, что, участвуя в Турнире впервые, ученик еще не подготовлен к задачам основного варианта и дорастет до них только при втором или третьем участии в нем. Но когда ученик впервые получил Диплом Турнира городов, ему можно мягко порекомендовать занятия математикой более серьезные, чем участие в олимпиадах. Способные ученики подходят к этому уровню в результате примерно года успешных занятий в хорошем математическом кружке или классе.

Среди таких более серьезных занятий — заочный конкурс и Летняя конференция.

Наряду с дипломами, присуждаемыми от имени Центрального жюри Турнира, премии могут присуждать местные жюри. Такими премиями могут отмечаться ученики, которые показали свою способность к решению нестандартных задач и которым безусловно рекомендуется заниматься математикой.

В Москве ученик, впервые получающий диплом, считается избранным в Научное школьное общество при Турнире городов. Этим подчеркивается значение первого получения диплома — оно возможно один раз в жизни, как возведение в рыцарское звание. Автоматически снижается смысл второго и т. д. дипломов. Делается это для того, чтобы не подталкивать учеников к олимпиадному профессионализму.

Для определения рейтинга города используется средний балл сильнейшей группы учащихся данного города. Размер группы зависит от населения города. Таким образом, большой город не имеет возможности поднять свой рейтинг просто за счет своего большого населения, и маленькие города могут на равных соревноваться с большими. Ученику не надо добиваться права выступать за свой город. Просто, если он хорошо выступил в Турнире, его результат автоматически пойдет в зачет города. Если же ученик выступил слабо, он не принес городу никакого вреда. С правилами определения рейтинга города можно ознакомиться в любом из отчетов о Турнире городов (выходят ежегодно).

На Летней конференции вообще не фиксируется линейная упорядоченность результатов учащихся. Ученикам даются длинные задачи на неделю, и высоко оценивается максимальное продвижение в одной какой-нибудь задаче. Особенно интересно, если ученики получили результаты, ранее не известные авторам задач. На конференции дух соревнования людей между собой уходит на второй план. Остается соревнование людей с природой. Главным стимулом становится интерес к самим задачам.

Заочный конкурс есть зимнее продолжение Летней конференции.

2. Примеры задач

Все сказанное относится к правилам проведения Турнира городов, но не касается качества задач. Между тем, как бы ни были хороши правила, без хороших задач они не много стоят.

Мы рассматриваем математику как важную часть общечеловеческой культуры. На первый взгляд, математики занимаются олимпиадами, чтобы вербовать себе будущих коллег. Но это — только одна из задач, притом побочная. Она важна потому, что создает у математиков непосредственную заинтересованность во вложении своих сил в это дело. Главный же результат олимпиад — создание в среде молодежи более положительного отношения к математике и вообще к точным наукам. Подавляющее большинство школьников, с которыми мы работаем, не станут профессиональными математиками, а разойдутся по разным жизненным дорожкам. Но на всю жизнь математика останется их дружественной спутницей. Некоторым из них никогда не придется вспомнить ни одной школьной теоремы. Но их помощниками останутся — умение отличить точно поставленный вопрос, видение математической ситуации под нематематической оболочкой, умение не поддаваться соблазну ложной учености.

Исходя из этих предпосылок, мы не считаем важным осовременивать содержание задач. Конечно, содержание меняется — появились задачи на графы, на виды симметрий, на алгоритмы. Но и классические разделы — в особенности классическая геометрия — остаются в почете. Это прекрасная наука для развития ума, а то, что она не очень нужна современному математику и прикладнику — дело глубоко второстепенное (а сама эта ненужность — под вопросом).

Сформулировать, что такое «хорошая задача», невозможно. Но когда задача предъявлена, она говорит сама за себя (или против себя). В идеале задачи должны иметь научную ценность, быть достаточно интересными, достаточно простыми и достаточно разнообразными. Кроме того, задачи основных вариантов должны быть оригинальными. Поскольку, кроме того, задачи должны быть подготовлены к определенному сроку, идеал, как правило, не достигается. Тем не менее, среди задач, предлагавшихся на Турнире городов, доля хороших задач довольно велика. Не берусь утверждать, что я здесь подобрал действительно лучшие из задач прошедших турниров, но выбранные мною задачи отражают, как мне кажется, специфику нашего подхода.

Вот примеры некоторых задач предпоследнего (17-го) Турнира городов.

1. На плоскости расположен квадрат, и невидимыми чернилами нанесена точка P. Человек в специальных очках видит точку. Если провести прямую, то он отвечает на вопрос, по какую сторону от нее лежит P (если P лежит на прямой, то он говорит, что P лежит на прямой). Какое наименьшее число таких вопросов необходимо задать, чтобы узнать, лежит ли точка P внутри квадрата? (А. Белов)

Комментарий. Эта задача несложная; ее решило большинство участников осеннего тура 17-го Турнира городов, писавших тренировочный вариант. Задача имеет неожиданный ответ (достаточно трех вопросов). Она интересна как для школьников, так и для математиков всех возрастов. Доказательство минимальности числа «три» достаточно простое для начинающих.

2. а) Существуют ли два равных семиугольника, все вершины которых совпадают, но никакие стороны не совпадают? б) А три таких семиугольника? (Напоминание: многоугольник на плоскости ограничен несамопересекающейся замкнутой ломаной). (В. Произволов).

Комментарий. Эта задача — средней сложности (осенний тур 17-го Турнира городов, основной вариант для 8–9 классов). Для ее решения не требуется никаких знаний, но необходимо геометрическое воображение и склонность к изобретательству.

3. На берегу круглого озера растут 6 сосен. Известно, что если взять такие два треугольника, что вершины одного совпадают с тремя из сосен, а вершины другого — с тремя другими, то в середине отрезка, соединяющего точки пересечения высот этих треугольников, на дне озера находится клад. Неизвестно только, как нужно разбить данные шесть точек на две тройки. Сколько раз придется опуститься на дно озера, чтобы наверняка отыскать клад? (С. Маркелов)

Комментарий. Это — довольно трудная задача (осенний тур 17-го Турнира городов, основной вариант 10–11 классов). На первый взгляд задача — комбинаторная. Некоторые ученики так ее и рассматривали и считали, что нужно только подсчитать число разбиений множества из шести элементов на две тройки. Были и такие, которые задачу не решили, но установили экспериментально, что ответ — одно опускание. Для решения задачи нужны некоторые знания из элементарной геометрии, а также такой факт из геометрии (или из механики), что центр тяжести системы точек можно находить так: разбиваем точки на две подсистемы, находим центры тяжести этих подсистем, а затем находим общий центр тяжести двух точек — центров тяжести этих подсистем (массы точек равны массам подсистем). У задачи был «тропический вариант», в котором озеро было заменено круглым островом, сосны — пальмами, а опускание на дно — копанием ям. Вообще литературное оформление задач играет не последнюю роль в создании благоприятной атмосферы на Турнире городов. Мы показываем, что о задаче судят не по одежде, и внешняя наукообразность и внутренняя научность — разные вещи. Хорошо, когда задача занимательна в литературном отношении. Важно, однако, чтобы литература всегда оставалась на втором плане.

Некоторые задачи прошлых турниров.

4. Имеется два дома, в каждом доме — два подъезда. Жители держат кошек и собак. Известно, что в первом подъезде первого дома доля кошек (отношение числа кошек к общему числу кошек и собак) больше, чем доля кошек в первом подъезде второго дома, а во втором подъезде первого дома доля кошек больше, чем во втором подъезде второго дома. Можно ли утверждать, что доля кошек в первом доме больше, чем доля кошек во втором доме? (А. Ковальджи).

Комментарий. Для решения задачи не нужно ничего, кроме ощущения числа как величины (14-й турнир городов, весенний тур, тренировочный вариант для 8–9 классов). Решить ее может любой человек, понимающий текст. Но задача не очень легкая. В особенности она трудна для тех, кто, пользуясь калькулятором, никогда не считает в уме. Калькулятор, как и некоторые другие хищные вещи века, привел к деградации умственного развития человечества. В ту же сторону действуют и некоторые школьные программы, отменяющие ученикам всякую потребность думать, я имею в виду в особенности отмену старого предмета — арифметики, где для каждой задачи приходилось находить свой подход. Теперь используются алгебраические методы решения этих задач. Но тем самым этот предмет стал просто не нужным. Старая арифметика умерла, но чем ее заменить? Ответа пока нет, но мы стараемся не пропускать задачи, которые могут восполнить пробел.

5. Пешеход шел 3.5 часа, причем за каждый промежуток времени в один час он проходил ровно 5 км. Следует ли из этого, что его средняя скорость за все время равна 5 км/ч?

Комментарий. В одном из учебников физики для средней школы было приведено неверное определение средней скорости. Анализ этого определения привел к формулировке этой задачи (четвертый турнир городов, 7–8 класс, второй тур).

6. Можно ли подобрать четыре непрозрачных попарно непересекающихся шара таких, чтобы ими можно было загородить точечный источник света?

Комментарий. Требуется только геометрическое воображение, хотя и знание школьного курса не помешает (тренировочный тур московского варианта девятого турнира, задача заимствована из ленинградского сборника).

3. Турнир городов и образовательный потенциал

Образовательный потенциал распределен в мире крайне неравномерно. Самая большая в России концентрация образованных людей всех направлений имеется в двух столицах — Москве и С.-Петербурге. На них в значительной степени лежит нагрузка поддержания образовательного потенциала всей России. Есть еще несколько центров, образовательный уровень которых достаточно высок, чтобы частично выполнять роль столиц, в особенности в своем регионе. В большинстве же населенных пунктов этого уровня нет.

Мы исходим из того, что будущее имеет то общество, которое заботится о своем образовании. Под образованием мы имеем в виду все его уровни — от элементарной грамотности до уровня больших ученых. Важно не только, чтобы государство заботилось об образовании народа. Важно, чтобы в среде молодежи была тяга к образованию.

За признак такой тяги часто принимаются величины конкурсов в высшие учебные заведения. Такой подход вполне нормален для людей со стороны — журналистов, чиновников и работников органов статистики. Но преподаватели прекрасно понимают, что такой подход недостаточен. Важно не только и не столько то, сколь велик конкурс численно, но главным образом то, кто пришел в институт. В Латвии, где хорошо поставлена профориентация, считается, что конкурса вообще не должно быть (если он есть, значит кто-то зря потратил время и силы на то, чтобы поступать — это укор системе профориентации). И в российской практике есть примеры, когда чем меньше конкурс, тем лучше набор. Это возможно (и действительно возникает) в случаях, к которым подходит следующая модель (цифры примерные): набирается 300 человек, при этом 100 человек знают, куда идут, остальные — случайные люди. Если их 200 человек, то каждый третий в новом наборе знал, куда шел. Если их 800 человек, то среди абитуриентов люди первой сотни составляют одну девятую часть. Какова же будет их доля среди поступивших? Она может равняться той же одной девятой, если экзамен организован очень плохо и мало отличается от лотереи.

В системе заботы общества о своем образовании Турнир городов находит свое место. Его роль заключается в том, чтобы в каждом регионе как можно больше выпускников правильно определили свой путь. Правда, пока речь идет только о математике, но и в этом вопросе Турнир городов не провоцирует ошибки, так как он вовсе не настраивает всех подряд выбирать эту профессию. Турнир городов помогает учащимся правильно оценить свой уровень и свои возможности. В некоторых городах математика при содействии Турнира вошла в моду среди молодежи и стала распространенным увлечением. Конечно, это возможно лишь в случае, если местные активисты используют заложенные в форме Турнира возможности и опираются на местные традиции.

Наиболее эффективно продуманное сочетание нескольких видов работы, различающихся формами и уровнем и касающихся различных предметов (не только математики). В качестве примера работы в направлении других предметов можно привести Турнир им. М. В. Ломоносова, проводимый ныне в двух городах — Москве и Кирове. В Москве этот турнир организационно связан с Турниром городов. Это несложное многопредметное соревнование старших школьников. Оно может быть привлекательно как для школьников, еще не определивших своих пристрастий, так и для тех, чей основной интерес уже определился и чья любознательность выходит за пределы этого интереса. Турнир им. Ломоносова интересен еще и тем, что он является полем совместной работы представителей различных дисциплин, что полезно и для организаторов этого мероприятия.

Школьники, принявшие участие в Турнире им. Ломоносова, пополняют затем различные кружки и олимпиады по разным направлениям. Это, в свою очередь, дает возможность проводить хорошие наборы в специальные классы и школы и помогает молодежи делать обоснованный выбор профессии.

Обсуждение работы в направлении других предметов (не математики) не входит в тему этой статьи. Скажу только, что в настоящее время уже работают Турниры городов по физике и химии и интерес к ним высок.

Все сказанное в связи с образовательным потенциалом о Турнире городов можно отнести и к олимпиадам, в том числе тем, которые входят в систему Международной олимпиады. Но формат Турнира городов более согласован с потребностями образования, чем формат системы Международной олимпиады.

В системе Международной олимпиады элементарной единицей является государство. Чтобы подготовить команду на Международную олимпиаду, маленькое государство должно найти всех способных учеников соответствующего возраста, и все равно их не хватает для укомплектования команды. В большом государстве, наоборот, возникает острая конкуренция между учениками за право попасть на Международную олимпиаду. Слишком большое внимание уделяется выделению небольшой группы, и в этой группе возникают неправильные взаимоотношения. Между тем, большому государству нужны сотни и тысячи квалифицированных специалистов для заполнения кафедр и научных центров. Правила Турнира городов, активизируя местных преподавателей школ и вузов, способствуют поддержанию в стране среды, которая заботится об образовательном уровне своего региона, а тем самым и всей страны.

В Турнире городов тысячи учащихся разных городов и стран без всяких предварительных этапов могут участвовать сразу в международном соревновании. Это помогает им и их преподавателям видеть свое положение в абсолютной системе отсчета и содействует развитию международного сотрудничества и обмена идеями и традициями.

Приглашение к участию в Турнире городов

Турнир городов — международное математическое соревнование старших школьников. Турнир городов организован группой математиков, которые в течение многих лет проводили математические олимпиады всех уровней — от школьных до международных. Эти математики поняли, что в математических олимпиадах сочетаются позитивные и негативные составляющие. Желание дать олимпиадам новое развитие, сохранив позитивные и устранив негативные их стороны, привело к созданию в 1980 г. Турнира городов.

Управление Турниром городов двухуровневое — имеются Центральные Оргкомитет и Жюри, которые формулируют общие для всех правила и единые задания и подводят общие итоги, и местные оргкомитеты и жюри, которые организуют всю работу на местах. Для школьников одного города Турнир городов — это очная олимпиада, проводимая в этом городе в общие для всех городов сроки и по единым заданиям. Соревнование городов между собой — заочное, итоги этого соревнования подводятся Центральным Жюри по присылаемым из городов-участников лучшим работам школьников и отчетам местных организаций.

В системе Турнира городов есть еще ряд мероприятий, проводимых местными и центральными организациями Турнира. Так, московская организация проводит массовый многопредметный Турнир им. М. В. Ломоносова, центральная организация проводит ежегодную Летнюю конференцию, на которую приглашаются участники Турнира, добившиеся в Турнире наивысших результатов, и их учителя. Продолжением Летней конференции является заочный конкурс по решению трудных задач. Турнир становится стержнем, вокруг которого организуется целая система работы со школьниками, приспособленная к местным условиям.

Если в городе, не принимавшем до сих пор участия в Турнире городов, найдутся инициаторы (университетские профессора или школьные учителя), которые возьмут на себя функции местного оргкомитета, то этот город может включиться в Турнир. Процедура включения состоит только в том, что нужно сообщить Центральному оргкомитету имя организатора и адрес, по которому следует высылать задачи и другие материалы. Допускается пробное участие без фиксации результатов в общем отчете. Участие в Турнире бесплатное для тех, кто не имеет возможности заплатить. Однако у центральных организаций Турнира нет иных средств, кроме тех, которые вносятся участниками, поэтому оплата весьма желательна.

Величина годового взноса установлена на сессии WFNMC (World Federation of Nation Mathematics Competipions) в 1992 г. и составляет $50+3N$ долларов США ($N = \max(5, \text{нас}/100000)$, нас — население города). Таким образом, город с населением до 500 тыс. жителей вносит 65 долларов США в год.

Города России оплачивают свое участие, заключая договор на информационное обслуживание с Информационным центром Турнира городов (зарегистрированная общественная организация, представляющая Турнир городов в России).

Связаться с Центральным Оргкомитетом Турнира и Жюри можно по адресу:

`121002, Москва, Б. Власьевский пер., 11, к.211,`
`"Турнир Городов"`

Проблемы математического образования

Восьмой Международный конгресс по математическому образованию

Г. Д. Глейзер (РАО) Н. Х. Розов (МГУ)

Восьмой Международный конгресс по математическому образованию (8-th International Congress on Mathematical Education, ICME-8) проходил с 14 по 21 июля 1996 года в Севилье, Испания. На целую неделю столица Андалузии, один из крупнейших и красивейших испанских городов, неразрывно ассоциирующийся с именами легендарных Дон Кихота и Санчо Панса, с бессмертными операми «Кармен» и «Севильский цирюльник», превратился в международный центр математического образования.

Вся необходимая и многотрудная подготовка к конгрессу была обеспечена Национальным комитетом (National Committee; президент Gonzalo Sánchez Vázquez) и Организационным комитетом (Local Organizing Committee; президент: Antonio Pérez Jiménez); кропотливым формированием содержания работы конгресса занимался Международный программный комитет (International Program Committee; президент Claudi Alsina). Вся эта деятельность проходила под руководством и при участии Международной комиссии по обучению математике (International Commission on Mathematical Instruction, ICMI; президент Miguel de Guzmán) и при активном содействии Испанской федерации обществ преподавателей математики.

* * *

Проведение регулярных Международных конгрессов по математическому образованию — одно из важнейших мероприятий Международного союза математиков (International Mathematical Union, IMU), уступающее по своему значению и популярности разве что традиционным Международным конгрессам математиков (International Congress of Mathematicians, ICM). Правда, если история последних насчитывает уже 100 лет (они проходят каждые четыре года; впервые такой конгресс был созван в 1897 году в Цюрихе, а очередной намечен на 1998 год в Берлине), то летопись Международных конгрессов по математическому образованию совсем не так длинна.

Первый Международный конгресс по математическому образованию состоялся в 1969 году в Лионе (Франция) — по решению, принятому во время Международного конгресса математиков в Москве в 1966 году. Было установлено, что Международные конгрессы по математическому образованию созываются каждые четыре года, в середине цикла между очередными Международными конгрессами математиков. Дальнейший список Международных конгрессов по математическому образованию таков:

- ▷ 2 ICME (1972 г.) — Эксетер (Великобритания);
- ▷ 3 ICME (1976 г.) — Карлсруэ (Германия);
- ▷ 4 ICME (1980 г.) — Беркли (США);
- ▷ 5 ICME (1984 г.) — Аделаида (Австралия);
- ▷ 6 ICME (1988 г.) — Будапешт (Венгрия);
- ▷ 7 ICME (1992 г.) — Квебек (Канада).

На протяжении многих лет наша страна по праву признавалась одной из ведущих в мире в постановке математического образования в школах и вузах, в организации работы с молодежью, проявляющей интерес и склонность к математике, в подготовке математических научных кадров. Поэтому нельзя с сожалением не отметить, что ее нет среди тех, которые принимали у себя Международный конгресс по математическому образованию.

Мы не будем останавливаться здесь на истории и содержании всех предыдущих Международных конгрессов по математическому образованию. Отметим только, что посвященные им публикации можно найти, например, в журнале «Математика в школе». Надо, однако, сказать, что они носили преимущественно беглый, обзорно-информационный характер, зачастую не раскрывали детально подходов (особенно — предложенных иностранными участниками) ко многим затронутым на конгрессах важным проблемам.

И это очень досадно. Например, произнесенные на ICM доклады затем собираются в специально издаваемых томах (и даже переводятся на русский язык) и тем самым оказывают большое влияние на развитие математической мысли. А интересные и полезные материалы ICME — сделанные сообщения, обсуждавшиеся идеи, представленный опыт — остаются фактически малодоступными для широкого круга преподавателей математики в нашей стране. Несомненно, что обстоятельный анализ таких материалов и выработка на их основе конкретных практических рекомендаций — актуальная тема будущих исследований по методике преподавания математики.

* * *

Основной целью Международных конгрессов по математическому образованию является всемерное содействие дальнейшему совершенствованию обучения математике, широкому обмену педагогическим и методическим опытом, ознакомлению с новинками учебной литературы и оборудования, внедрению информатизационных и компьютерных технологий. Программа конгрессов всегда включала в себя широкий спектр самых различных вопросов, имеющих отношение к обучению и изучению математики в школе, к организации внеклассной работы по математике, к обеспечению качественной подготовки учителей и их привлечению к исследованиям по методике преподавания математики, к самообразованию и творчеству в области математики, к пропаганде и популяризации математических знаний, к постановке курсов высшей математики в вузах.

Такое же богатство и разнообразие проблем, подходов, идей, концепций, разработок, материалов предложили участникам и организаторы конгресса в Севилье. Обстоятельно описать всю его научную программу, содержательно рассказать о всех докладах, сообщениях и дискуссиях в одной статье практически невозможно — как было физически невозможно посетить все заседания и встречи.

Мы попытаемся здесь проинформировать читателя лишь о наиболее важных и интересных — с нашей точки зрения — темах и аспектах работы ICME-8. Одновременно нам хотелось бы привлечь внимание российских преподавателей и профессионалов, студентов и любителей математики к ряду важных проблем, поставленных в ходе конгресса, и к отдельным выводам и рекомендациям, которые представляются актуальными.

* * *

Официальное начало работы состоялось 14 июля в грандиозном Дворце конгрессов — одном из красивейших современных сооружений Севильи. Как и полагается на торжественном открытии, здесь прозвучали сердечные приветствия и искренние пожелания в речах Председателя правительства Андалузии, руководителей образовательных структур Испании и представителей международных научных объединений. С особым интересом было встречено выступление Президента ICMI Мигеля де Гузмана (Испания), посвященное значению математики и математического образования для прогресса культуры и развития цивилизации.

На ICME-8 прибыло, по данным организаторов, более 4000 участников из почти 90 стран мира. Можно констатировать, что интерес к конгрессам по математическому образованию постоянно растет. Вот некоторые цифры для сравнения: на первом конгрессе в Лионе присутствовало лишь около 600 человек, на предпоследнем, в Квебеке, было зарегистрировано порядка 3000 участников. Эта тенденция свидетельствует о все возрастающей роли, которую играет математическое образование в странах мира, особенно передовых в технологическом отношении, и о стремлении преподавателей математики к тесному сотрудничеству и широкому обмену идеями.

Конечно, по числу участников лидировала Испания — страна-организатор сделала все, чтобы ее учителя и математики смогли присутствовать на этом форуме. (Кстати, рабочими языками конгресса были объявлены английский и испанский.) Особенно широко были представлены испаноговорящие и латиноамериканские страны; участие многих стран Европы оказалось менее представительным, чем можно было ожидать.

Министерства и ведомства России, занимающиеся образованием и наукой, никого на ICME-8 направлять даже не собирались (впрочем, то же самое было 4 года назад во время конгресса в Квебеке). Разве этот удивительный факт не является наглядным свидетельством существующего отношения к судьбе математического образования в стране? Лишь 13 россиян смогли приехать в Севилью — в частном порядке, благодаря самостоятельно найденной спонсорской поддержке. (Например, авторам настоящей статьи удалось участвовать в конгрессе только за счет грантов Международного научного фонда и Оргкомитета конгресса.) Как это контрастирует с ситуацией во время конгресса в Будапеште в 1988 году, куда прибыли официальная советская делегация из 26 человек (во главе с акад. С. М. Никольским) и более 50 педагогов по программе научного туризма!

* * *

Программа ICME-8 предусматривала 4 часовых пленарных доклада (plenary lectures), во время которых не было иных рабочих мероприятий:

- ▷ A. Sierpinska (Канада; вице-президент ICMI), «Куда идет математическое образование?»;
- ▷ M. de Guzmán (Испания; президент ICMI), «О роли математика в математическом образовании»;
- ▷ D. Tall (Великобритания), «Информационная технология и математическое образование: надежды, возможности и реалии»;
- ▷ J. de Lange (Нидерланды), «Реальные проблемы математики реального мира».

Излагать кратко содержание этих концептуальных докладов — значит только их портить, мешать попыткам авторов донести до научной и педагогической общественности свои нетривиальные взгляды, безусловно интересные, хотя подчас и спорные. Будем надеяться, что переводы полных текстов этих докладов все же появятся на русском языке в каком-либо из общедоступных изданий. (Мы специально приводим подлинные написания фамилий докладчиков на тот случай, если возникнет желание познакомиться с их текстами по публикациям на языке оригинала.)

* * *

Программа конгресса включала в себя и 56 докладов по приглашению (regular lectures). На каждый из них выделялся тоже 1 час, однако они проходили уже параллельно другим заседаниям. Полный список названий этих докладов был бы чрезмерно длинным, и мы ограничимся воспроизведением лишь некоторых из них, чтобы показать широту охваченной тематики (порядок докладов соответствует программе конгресса):

- ▷ P. Broman (Швеция), «Преподавание и изучение математики для будущего»;
- ▷ C. Kieran (Канада), «Меняющееся лицо школьной алгебры»;
- ▷ Th. Cooney (США), «Концептуализация профессионального роста учителей»;
- ▷ J. L. Vicente (Испания), «Геометрия и символическое исчисление»;
- ▷ Nguyen Dinh Tri (Вьетнам), «Некоторые аспекты университетской программы по математике для инженеров»;
- ▷ Zonghu Qiu (Китай), «Математические соревнования в Китае — успехи и трудности»;
- ▷ G. Vergnaud (Франция), «Важнейшие когнитивные изменения в изучении математики: перспективы развития»;

- ▷ P. Bender (Германия), «Базисные представления и пути понимания математических концепций на всех уровнях обучения»;
- ▷ D. Moore (США), «Новая педагогика и новое содержание: случай статистики»;
- ▷ G. Howson (Великобритания), «Математика и здравый смысл»;
- ▷ O. Skovsmose (Дания), «Критика математического образования — некоторые философские замечания»;
- ▷ J. Dalmaso (Аргентина), «Математические олимпиады в Аргентине: прошлое, настоящее и будущее»;
- ▷ A. Thompson (США), «Концептуальная и вычислительная ориентации в преподавании математики»;
- ▷ L. Arboleda (Колумбия), «Концепции математики и опыта по Морису Фреше».

Можно лишь пожалеть, что имена многих докладчиков, как и их работы, пользующиеся авторитетом в педагогическом мире (Международный программный комитет очень тщательно отбирал кандидатуры приглашаемых), мало известны в нашей стране. Между тем в их докладах содержались нестандартные соображения специалистов по педагогике, методике, организации учебного процесса, оригинальные разработки дидактических материалов, пособий, технологий, полезный опыт практиков математического просвещения. Все это очень важно и для российской школы.

Как часто мы читаем в наших изданиях о различных проблемах математического образования, спорим о них на своих конференциях и семинарах! Однако не изобретаем ли мы подчас «велосипед», просто не зная — из-за практически полного отсутствия постоянной качественной информации о зарубежной методической мысли — все то, что за границей легкодоступно любому творчески активному учителю? Не пора ли в наших учреждениях, занятых разработкой вопросов преподавания математики, взять за правило периодически готовить для публикации обстоятельные систематические обзоры (если целесообразно — то и переводы) наиболее интересных статей из десятков журналов мира по этой тематике?

И еще один печальный факт приходится констатировать, просматривая список приглашенных докладчиков. На предыдущих конгрессах неизменный интерес вызывали тщательно подготовленные, содержательные и актуальные выступления представителей нашей страны (например, до сих пор сохраняет актуальность пленарный доклад акад. А. П. Ершова «Компьютеризация школы и математическое образование», прочитанный на ICME-6). Сегодня российские исследователи практически не имеют надежной материальной возможности присутствовать и выступать на международных форумах с изложением свежих идей и новых разработок. Кроме того, они мало публикуются в зарубежных изданиях (обычно из-за скверного владения иностранным языком), а отечественная научная периодика выходит часто такими тиражами, что не всем доступна даже на родине. В результате информационная оторванность наших специалистов от международного педагогического сообщества делает их фамилии и работы мало известными в мире.

Это, как правило, и не позволяет россиянам, активно и творчески занимающимся теорией и практикой математического образования, попасть в число докладчиков, подбираемых Международным программным комитетом (хотя у нас достаточно вполне достойных кандидатур). Кроме того, нет никакой уверенности, что, даже получив приглашение, действительно удастся найти средства для участия в конгрессе. И вот результат: среди приглашенных на ICME-8 докладчиков был всего один (!) из России:

▷ В. Фирсов (Россия), «Российские стандарты: концепции и решения».

В будущем участие нашей страны в международных конгрессах должно стать предметом постоянного внимания и реальной работы государственных и научных органов, призванных сообща решать организационно-финансовые проблемы и обеспечить достойное представительство российской науки.

* * *

Доклады, являясь как бы фасадом конгресса, вызвали, конечно, специальный интерес, но основная, наиболее динамичная и особенно информативная работа протекала, как всегда, в более узком составе, на всевозможных специализированных заседаниях. Для того чтобы максимально удовлетворить многообразные запросы многочисленных участников конгресса, организаторы запланировали около 200 заседаний, встреч, дискуссий, продолжительностью 1–1,5–2 часа. Вызывает восхищение тщательность, с которой подбиралась тематика этих заседаний. И остается только сожалеть, что на большинство из них (несомненно, интересных и важных) все равно попасть, увы, не удалось из-за дефицита времени.

Прежде всего, деловое общение конгрессистов было рассредоточено по 26 рабочим группам (working groups) и 26 тематическим группам (topic groups). Именно на заседаниях этих групп происходило живое обсуждение разных актуальных вопросов, высказывались разнообразные, подчас противоречащие друг другу точки зрения, разгорались горячие заинтересованные дискуссии, проходил обмен накопленным педагогическим опытом.

Рабочие группы охватывали практически все аспекты теории и практики, методики и методологии преподавания математики в средних и высших учебных заведениях, психологии обучения и восприятия, культурной и социальной значимости математического образования. Приведем названия рабочих групп, функционировавших во время ICME-8:

- ▷ Коммуникабельность в классе.
- ▷ Формы математического знания.
- ▷ Отношение и мотивация учащихся к математике.
- ▷ Затруднения учащихся при изучении математики.
- ▷ Преподавание в классах с учениками разных способностей.
- ▷ Пол и математика.
- ▷ Математика для способных учащихся.
- ▷ Математика для учащихся с различными интересами.
- ▷ Инновации в оценке знаний.
- ▷ Языки и математика.
- ▷ Программа нулевого уровня.
- ▷ Эволюция программы по математике в начальной школе.
- ▷ Эволюция программы по математике в средней школе.
- ▷ Математика и другие школьные предметы.
- ▷ Влияние технологий на программу по математике.
- ▷ Роль технологий в процессе преподавания.
- ▷ Роль математики в высшем образовании.
- ▷ Математическое образование взрослых.
- ▷ Подготовка и переподготовка учителей.
- ▷ Оценивание преподавания, учебных центров и систем.
- ▷ Преподавание математики и различные культуры.

- Математика, образование, общество и культура.
- Сотрудничество стран и регионов в математическом образовании.
- Критерии качества и актуальности исследований по математическому образованию.
- Методика преподавания математики как научная дисциплина.
- Связь между теорией и практикой в математическом образовании.

Тематические группы затрагивали подавляющее большинство узловых проблем, касающихся конкретных вопросов программы математического образования в школе и вузе, содержания и форм внеклассной работы (прежде всего — с талантливой молодежью), содействия самообразованию, активизации пропаганды и популяризации математических знаний. Вот как были обозначены тематические группы, работавшие в рамках ICME-8:

- Математика в начальной школе.
- Математика в средней школе.
- Математика в университетах.
- Дистанционное обучение математике.
- Обучение математике в процессе практической деятельности.
- Преподавание математики с конструктивистской точки зрения.
- Воспитание математического творчества.
- Доказательства и доказательность: почему, когда и как?
- Статистика и вероятность в средней школе.
- Решение задач, предусмотренных программой.
- Будущее математического анализа.
- Будущее геометрии.
- Будущее алгебры и арифметики.
- Бесконечные процессы, изучаемые в рамках программы.
- Искусство и математика.
- История математики и преподавание математики.
- Математическое моделирование и приложения.

- ▷ Роль калькуляторов в процессе преподавания.
- ▷ Обучение с помощью компьютерного диалога.
- ▷ Технологии для наглядного изображения.
- ▷ Обучение математике с помощью конструкционных материалов.
- ▷ Математические игры и головоломки,
- ▷ Будущие формы публикаций в математическом образовании.
- ▷ Математические соревнования.
- ▷ Математические клубы.
- ▷ Международные исследования уровня математического образования.

Во время заседаний каждой рабочей или тематической группы заслушивались сообщения, заявленные участниками и отобранные руководством группы. На выступления отводилось, как правило, 15–30 минут и почти все они были представлены с использованием современной демонстрационной техники, что существенно экономило время. Весьма содержательными были и оживленные обсуждения, возникавшие после многих сообщений. Стоит упомянуть и все шире распространяющуюся среди выступающих практику кратко представлять содержание своего сообщения, а затем раздавать заранее размноженный текст и другие подготовленные материалы тем, кто заинтересовался дополнительными деталями затронутой темы.

Рассказывая об интересных и содержательных заседаниях рабочих и тематических групп, нельзя с благодарностью не подчеркнуть кропотливую и вдумчивую деятельность их руководителей (chief organizer) и членов бюро (advisory panel). Несомненно, что все они показали себя как уважаемые, компетентные и увлеченные люди.

Странно, однако, что среди почти двухсот человек, приглашенных организаторами конгресса из нескольких десятков стран для подготовки программ групп, не оказалось ни одного россиянина. Означает ли это, что в России нет специалистов достойной квалификации? Нет, конечно. Дело, видимо, в отсутствии нашего представительства в ICMI и эпизодичности наших официальных контактов с ведущими международными центрами математического образования, все в той же фактической изолированности наших методических поисков и малоизвестности наших результатов.

Подчас ситуация просто парадоксальна. В России традиционно поддерживается высокий уровень и массовость олимпиад и других математических соревнований. Во многих странах получил широкое распространение среди увлеченной математикой молодежи и завоевал заслуженную популярность у педагогов родившийся в России и проводимый нашими усилиями «Турнир городов». Однако в руководстве Международной федерации национальных математических соревнований (World Federation of National Mathematics Competitions, WFNMC) мы не имеем ни одного представителя (для сравнения: Болгария имеет там двоих представителей).

В этой связи хочется выразить надежду, что Министерство общего и профессионального образования Российской Федерации, Российская академия наук и Российская академия образования совместно с ведущими университетами и педагогическими центрами найдут возможность создать единый центр, который будет координировать усилия учителей, методистов, ученых, популяризаторов, издателей, организаторов в области математического образования, развивать международные контакты, обеспечивать двусторонний эффективный обмен информацией и опытом. Одновременно необходимо предпринять шаги к установлению тесного делового и информатизационного взаимодействия с ICMI и другими международными организациями и объединениями, занимающимися математическим образованием.

* * *

Помимо выступлений на заседаниях групп, на конгрессе предусматривались многочисленные «стендовые доклады» — как в традиционной форме письменных аннотаций (posters), так и на базе видеотехники (videos) или компьютеров (software).

Кроме того, в ходе конгресса проходили:

- ▷ представления проектов (projects reports) различных образовательных мероприятий, учебных комплектов, обучающих комплексов и программных продуктов для разных ступеней математического образования;
- ▷ многочисленные широкие форумы (meetings) по конкретным теоретическим и практическим вопросам (например, собрание издателей математических журналов для юношества и др.);
- ▷ круглые столы (round tables) по весьма общей проблематике;
- ▷ заседания исследовательских групп (study groups) и семинаров (studies) под эгидой ICMI (Международная группа по психологии

математического образования, Международная группа по связям истории и преподавания математики, семинар на тему «Что такое исследование по математическому образованию и что является его результатом?» и др.)

▹ заседания рабочих групп (workshops) по специально отобранной тематике («Игры во время преподавания в классе», «Математика хаоса», «Пространственное воображение» и др.).

Параллельно с конгрессом были созваны заседания ряда международных союзов и объединений. В частности, состоялись Генеральная ассамблея ICMI, совещание руководителей национальных математических организаций, заседания WFNMC (где новым Президентом этой организации избран R. Dunkey, Канада), Международной организации «Женщины и математическое образование» (International Organization of Women and Mathematics Education, IOWME), Общества Ады Байрон (Ada Byron Society) и др. Были учреждены и новые организации: Международный совет по компьютерной алгебре в математическом образовании (International Council for Computer Algebra in Mathematics Education, IC-CAME) и Европейская ассоциация исследователей в области математического образования (European Association of Researchers in Mathematics Education, ERCME).

Три заседания посвящались отдельным странам (national presentation) — Испании, Австралии и Венгрии, а четыре — специальной тематике (например, «Испанские математики XX века»).

Наконец, желающие могли посетить развернутую на время конгресса очень интересную выставку (exhibition). Там были представлены многочисленные фирмы, работающие в сфере математического образования. Поражало изобилие прекрасно изданных новинок учебной, справочной, популярной, методической и научной литературы (хотя о содержании трудно судить при беглом просмотре), великолепно выполненных наглядных пособий и вспомогательных материалов, средств обучения и оборудования для кабинетов математики, новых образцов микрокалькуляторов и компьютеров. Здесь же были представлены достижения в разработке образовательных компьютерных программ, кино- и видеофильмов, математических игр и развлечений. Разумеется, экспонатов из России не было и в помине.

* * *

Каждый участник ICME-8 получил толстенный том, в котором помещено 685 заблаговременно представленных аннотаций сообщений (abstracts of short presentations) участников из 64 стран мира. (В нем нет резюме докладов и, естественно, сообщений, заявленных во время конгресса, выступлений в ходе дискуссий, на различных встречах и т. д.) С сожалением приходится констатировать, что своевременно были присланы и попали в книгу всего 15 аннотаций из России (для сравнения: США – 78; Бразилия – 68; Япония – 33; Китай – 23; Болгария – 10; Гонконг – 5). Но особенно печально, что абсолютное большинство их авторов так и не нашло возможности приехать в Испанию по финансовым причинам.

Однако определенная информация о теоретических и практических результатах проводимой в нашей стране работы в сфере математического образованию на конгрессе была все же представлена. Активно участвовали в различных заседаниях и обсуждениях Н. Константинов (организатор и руководитель «Турнира городов»), Г. Глейзер (сообщения «Математическое образование как элемент культуры» и «Новая система геометрического образования в школе»), О. Иванов (рассказавший о разрабатываемой программе подготовки учителей), А. Семенов (руководитель коллектива создателей компьютерных образовательных продуктов), Н. Розов (сообщения «Эволюция и дифференциация программы школьного курса математики» и «Проблемы развития математических соревнований для школьников»), И. Федоренко (организатор внеклассной работы по математике) и др. Правда, эта информация не нашла отражения в опубликованных материалах ICME-8: поскольку до последнего момента не было ясно, сумеют ли россияне оплатить вступительный взнос и найти деньги на дорогу, их заявки на сообщения были посланы слишком поздно.

* * *

Множество состоявшихся на ICME-8 выступлений, несомненно, конечно, но оно, по-видимому, несчетно — в том смысле, что никто их не считал. Поэтому невозможно проанализировать все высказанные на конгрессе мысли и предложения. Но очень важно было бы знакомить — хотя бы в сжатой форме — с содержанием наиболее интересных сообщений, с итогами дискуссий возможно более широкий круг лиц, связанных с образованием. Самый простой и эффективный путь к этому — завести практику после каждого заседания готовить специальный информативный обзор прозвучавших выступлений и предложений, а затем публиковать его в доступных профильных журналах и помещать в Internet.

Нам, к сожалению, удалось прослушать лишь отдельные сообщения и, стало быть, мы не располагаем исчерпывающей информацией и всеми материалами. Из-за этого мы не можем предложить читателям подробный анализ итогов конгресса и ограничимся только тем, что перечислим лишь некоторые из обсуждавшихся проблем, представляющиеся нам наиболее важными для дальнейшего развития математического образования в России.

1. Прежде всего хотелось бы отметить резко возросший интерес к научным исследованиям в области преподавания математики — как в средней, так и в высшей школе. Особенно важно подчеркнуть, что созданием оригинальных учебных методик и разработкой разнообразных педагогических экспериментов занимаются не только теоретики педагогики и организаторы образования, но и рядовые учителя, преподаватели вузов.

Во многих странах проблемы содержания и методики обучения привлекают пристальное внимание и профессионалов-математиков. Достаточно просмотреть программы регулярных конференций Американского математического общества, чтобы убедиться: на каждой из них планируются специальные секции «Реформа образования», «Методика обучения математике», «Инновации в преподавании», «Подготовка учителей» и т. п. Однако наши выдающиеся ученые-математики, наши ведущие научные центры проявляют к проблемам преподавания недостаточный интерес.

2. Особенно важно подчеркнуть, что и специалисты по методике преподавания математики, и профессионалы-математики все больше внимания уделяют проблемам не специализированных, элитных, а общеобразовательных, массовых школ. Именно такая школа реально формирует образовательный, интеллектуальный и культурный уровень «среднестатистического» гражданина страны, и без совершенствования программ и методик преподавания здесь невозможно решить проблему повышения этого уровня, что актуально на пороге XXI века.

Проблема улучшения обучения в общеобразовательных школах, особенно на селе и в небольших городках, остро стоит и в нашей стране. Согласно данным международных статистических служб, Россия по уровню квалификации кадров находится лишь в конце четвертого десятка государств мира. Ясно, что для изменения положение дел в первую очередь необходима целенаправленная политика в области школьного образования.

3. Становится совершенно очевидно, что дальнейший прогресс математического образования невозможен без глубокой компьютеризации учебного процесса и широкого внедрения компьютерных обучающих технологий. Поэтому подавляющее большинство педагогических разработок нацелено на всемерное использование возможностей вычислительной техники для совершенствования учебного процесса — повышения эффективности преподавания и углубления усвоения.

В этой связи становится особенно актуальной задача координации деятельности различных наших организаций, занятых созданием программной поддержки обучения.

4. Сегодня обучение молодого поколения рассматривается педагогической общественностью как актуальная мировая проблема, а педагогика, методика преподавания стали интернациональными науками. Только единым фронтом, обеспечивая постоянные связи и непрерывный обмен информацией, можно эффективно, быстро и экономично находить пути решения многих проблем школы и вуза.

Все это требует от нас реально интегрироваться в международные организации, внимательно изучать появляющиеся публикации и широко пропагандировать положительный опыт других стран, резко повысить качество отечественных методических исследований, активно публиковать их результаты в зарубежных журналах, всемерно поощрять инициативу и творческий поиск рядовых учителей.

5. Мировой опыт свидетельствует, что все еще остается трудноразрешимой задача подготовки квалифицированных учителей математики. И нам следует внимательнее познакомиться с тем, как в различных странах пытаются обеспечить должный профессиональный уровень студентов пединститутов, особенно по элементарной математике, высокое качество их методического, педагогического и психологического обучения, заранее проверить их внутреннюю готовность и реальную пригодность к преподавательской и воспитательной работе.

Особую актуальность приобретает задача дальнейшего совершенствования программ обучения будущих учителей математики в пединститутах, прежде всего — сбалансированности их математической и педагогической подготовки, а также проблема подготовки к работе в школе студентов математических факультетов классических университетов.

6. Выставка во время конгресса продемонстрировала море учебников, учебных пособий и информатизационных программ. Рыночные отношения на издательском поприще позволяют выпускать в свет разнообразную, прекрасно оформленную продукцию — и это замечательно,

Однако печально, что далеко не вся она является достаточно качественной, а отсутствие квалифицированного, объективного и систематического публичного рецензирования этой продукции подчас ставит учителя в весьма трудное положение капитана, плавающего по морю без компаса и карты. Как здесь не заметить, что во многих наших изданиях место разделов критики и библиографии давно уже заняла простая (или пустая?) реклама выходящей учебной и методической литературы?

7. Все признают, что наша школьная программа по математике требует дальнейшего совершенствования. Но многочисленные споры по поводу ее содержания (пропедевтика геометрии, необходимость начал анализа, введение вероятности и статистики и т. д.), характера изложения (выбор между линейностью и концентричностью, сочетание аксиоматичности и наглядности и др.), обеспечения дифференцированного обучения (как в основной школе, так и в специализированных старших классах) и по многим другим вопросам ведутся так, как будто мы являемся первопроходцами.

Между тем лучший зарубежный опыт — и построения программ, и создания учебников — давно следовало бы сделать доступным нашим учителям, систематически публикуя переводы этих материалов.

8. Одну проблему хочется выделить специально — проблему преподавания математики для школьников, интересующихся гуманитарными предметами, и студентов, избравших гуманитарные факультеты. Ключевой вопрос: в какой мере современный образованный, культурный человек должен владеть основами математической науки, являющейся одной из составляющих цивилизации? Проблема сложная, неразрывно связанная и с интеллектуальным развитием молодежи, и с усилением гуманистического компонента в обучении, и с расширением научного кругозора.

О «математике для гуманитариев» у нас сейчас тоже много пишут и говорят. Однако в большинстве случаев речь идет о неких паллиативах. И здесь было бы полезно проанализировать накопленный опыт, пойти не по пути формального урезания традиционной программы и ее пополнения случайными фактами с «гуманитарной интерпретацией», а попытаться сформировать качественно новую концепцию содержания и выработать принципиально иную методику неформализованного преподнесения.

9. Трудно себе даже представить то изобилие дополнительной литературы и вспомогательных учебно-методических материалов, которое предлагают школе энтузиасты образования разных стран. Не так давно наши книги и брошюры для внеклассной работы по математике считались одними из лучших в мире, но сегодня многие из них — библиографическая редкость, которую можно увидеть разве что у учителей старшего поколения.

И если наладить производство наглядных пособия и другого оборудования сейчас достаточно трудно, то переиздать и продолжить золотой фонд научно-популярной литературы по математике — наш долг.

10. Большое место в работе конгресса занимало обсуждение содержания и форм математических соревнований школьников. Нельзя не отметить, что наши успехи на международных математических олимпиадах

в последние годы выглядят более чем скромно, хотя официально продолжают расцениваться как очень хорошие. Так, в 1994 году команда России заняла 3-е место, всего на 1 очко обойдя Болгарию, а в 1996 году мы уже оказались на 4-м месте, пропустив вперед Румынию, США и Венгрию и обойдя всего на 1 очко Англию, на 7 очков Вьетнам и на 11 очков Южную Корею. Между тем, для полного понимания ситуации нужно не просто считать очки, а соотносить их с потенциалом страны и численностью учащихся.

Видимо, на этих результатах не могли не сказаться как общее ухудшение школьного образования в стране и отток математических кадров за границу, так и усиливающийся в последние годы опасный процесс превращения математических соревнований в своеобразный спорт за счет их отдаления от дополнительных непрерывных занятий математической теорией.

* * *

И еще несколько слов в заключение. Подготовка конгресса проходила под патронажем Короля Испании Хуана Карлоса I и при поддержке центрального и регионального правительств, Генерального директора ЮНЕСКО Ф. Майора, университета Севильи (предоставившего все свои помещения), международных и национальных математических объединений. Но основная тяжесть планирования работы конгресса и четкого его проведения лежала, конечно, на Организационном комитете. Мы считаем своим долгом специально отметить прекрасную организацию конгресса. Были предусмотрены все мелочи быта, созданы все удобства для работы, продуманы интересные экскурсионная и культурная программы. Даже ежедневно выходила (на двух языках) газета для конгрессистов «Diario de Sevilla».

Особой заслугой организаторов конгресса является то, что они проявили нестандартную заботу о многих участниках из различных стран мира и обеспечили грантами (включавшими регистрационный взнос, проживание в общежитии и питание в студенческой столовой) 7 процентов участников конгресса. Этот факт дал основание назвать форум в Севилье Конгрессом математической солидарности.

Официально объявлено, что следующий, 9-й Международный конгресс по математическому образованию планируется провести летом 2000 года в Макухари (Япония). Работа оргкомитета по его подготовке уже началась.

Задачный раздел

В этом разделе вниманию читателя предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном очень трудных. Некоторые из этих задач (не обязательно самые сложные!) требуют знания «неэлементарной» математики — анализа, линейной алгебры и т. п.

Составителям этой подборки кажется, что предлагаемые ниже задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Помимо самого решения трудных задач, в высшей степени полезно упражняться в изложении решений. Мы советуем всем, решившим какую-либо из задач, попробовать записать ее решение в максимально простом и понятном виде и прислать в редакцию. В последующих номерах мы опубликуем самые изящные из полученных решений.

К сожалению, нам известны авторы далеко не всех предлагаемых ниже задач. Многие из них известны десятилетия и стали частью «математического фольклора». Одна из целей, преследуемых составителями данного раздела, — записать этот «фольклор», многие части которого стремительно исчезают в наше время.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим свои собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи. Ждем ваших писем.

Сообщим ту информацию об авторах задач, которой располагаем (уточнения со стороны читателей приветствуются). Если автор задачи неизвестен, мы указываем того, кто предложил эту задачу.

Задачи 1, 3 предложил А. Канель-Белов, он же автор задач 2, 6б), 9. Задача 6а) принадлежит В. А. Сендерову, он же предложил задачу 10. Задачу 4 придумал С. Маркелов, задача 5 — совместное изобретение А. Канеля, А. Белова и А. Ковальджи. Задачу 7 придумал В. М. Тихомиров. Задачу 8 предложил А. Г. Кулаков.

Условия задач

1*. ШАХМАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Могут ли 1000 ладей в пространстве заматовать короля?

2*. КОНЕЦ ЧИСЛА

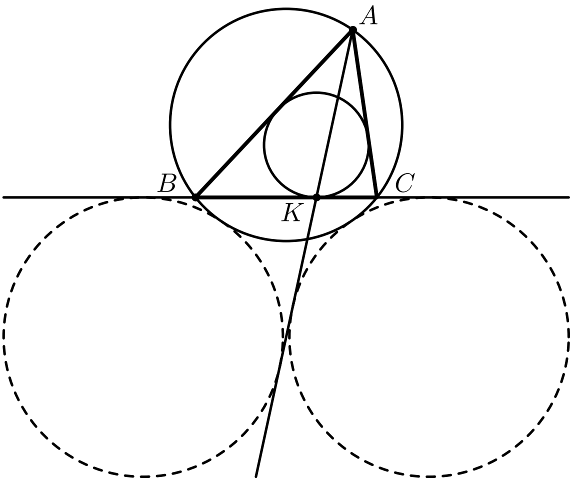
Доказать, что существует бесконечно много N таких, что 2^N оканчивается на N.

3. СИНУСЫ

Может ли сумма чисел вида $a\sin(k\pi/n)$, где a — рациональное число, k, n — целые, равняться $\sqrt{1997}$?

4. ВСЕГО ЛИШЬ ПЛАНИМЕТРИЯ

Дан треугольник ABC. K — точка касания вписанной в него окружности и стороны BC. Рассмотрим две окружности, касающиеся прямой BC, луча AK и окружности, описанной вокруг $\triangle ABC$ (на рисунке изображены пунктиром). Доказать, что их радиусы равны.



5. РАЗРЕЗАНИЕ

Линия делит квадрат на две равные части. Всегда ли она проходит через центр квадрата? Тот же вопрос для куба.

6. МНОГОЧЛЕН

а) дан многочлен $P(X)$. Для любого $X > 0$: $P(X) > 0$. Доказать, что что $P = Q/T$, где Q и T — многочлены с неотрицательными коэффициентами.

б)* пусть P — квадратный трехчлен, α — аргумент его комплексного корня. Тогда степень Q не меньше $2\pi/\alpha$.

7. ИНТЕГРАЛ

Пусть функция непрерывно дифференцируема на отрезке $[0;1]$,

$$f(0) = f(1) = 0, \qquad \int_0^1 \left(f'(t)\right)^2\, dt \leqslant 1.$$

Изобразить на координатной плоскости множество точек, через которые может проходить график функции $y = f(x)$.

8. СЕМЕЙСТВА ПОДМНОЖЕСТВ НАТУРАЛЬНОГО РЯДА

а) Может ли семейство подмножеств натурального ряда быть несчетным, если для любых двух подмножеств из этого семейства одно строго содержится в другом?

б) Тот же вопрос, если пересечение любых двух множеств в семействе конечно.

9. РЯД

Известно, что при любых действительных A, B ряд $\sum \dfrac{1}{|Ax_n + By_n|}$ расходится. Обязан ли расходиться ряд $\sum \dfrac{1}{|x_n| + |y_n|}$? А что если A и B могут быть комплексными?

10. МНОГОЧЛЕН

Функция, заданная на всей вещественной прямой, бесконечно дифференцируема. В каждой точке некоторая производная (номер производной может зависеть от точки) равна нулю. Докажите, что эта функция — многочлен.

Новые издания

МИРОС вашему дому

Е. Г. Козлова В. В. Произволов

Московский институт развития образовательных систем (МИРОС) занимается разработкой нестандартных подходов к обучению школьников. В издательстве МИРОС выходят книги, в которых отражаются интересные экспериментальные методы преподавания. Вот книги по математике, выпущенные МИРОСом.

1. Задачи по математике для внеклассной работы в V-VI классах: Пособие для учителей/ Сост. В. Ю. Сафонова; под ред. Д. Б. Фукса, А. Л. Гавронского. — М.: МИРОС. — 1995. — 72 с.: ил. Цена 3000 р.

В пособии из различных источников собрано около 300 нестандартных задач, для решения которых достаточно сведений, полученных в ходе изучения математики в первых пяти классах. Сборник призван помочь учителю в постановке внеклассной работы по математике, формировании интереса к ней у учащихся. Достаточно полно представлены известные идеи как композиции, так и решения задач. Сборник посвящен главным образом арифметике, логике и комбинаторике — традиционным областям занимательной математики. Проведена подробная рубрикация задач — тем самым предпринята попытка их классификации. В конце задачника приведены советы учителю по использованию предлагаемого материала в практической работе. Книга может быть полезна как любознательным школьникам, так и родителям, следящим за развитием своих детей.

2. Козлова Е. Г. Сказки и подсказки. Задачи для математического кружка. — М.: МИРОС. — 1995. — 128 с.: ил. Цена 5500 р.

Сборник содержит задачи, предлагавшиеся на занятиях математического кружка для учащихся 5–7 классов и решенные детьми. Широкий диапазон уровня трудности задач, сочетание забавности условий с серьезностью математического содержания, наличие подсказок и решений — все это позволяет использовать книгу как для формирования у ребят начального интереса к математике, так и для углубленных занятий. Вот, например, задача из этой книги:

«В небольшом шотландском городке стояла школа, в которой учились ровно 1000 школьников. У каждого из них был шкаф для одежды — всего 1000 шкафов, причем шкафы были пронумерованы числами от 1 до 1000. А еще в этой школе жили привидения — ровно 1000 приведений. Каждый школьник, уходя из школы, запирал свой шкаф, а ночью приведения начинали играть со шкафами, то отпирая, то запирая их.

Однажды вечером школьники, как обычно, оставили запертыми все шкафы. Ровно в полночь появились привидения. Сначала первое привидение открыло все шкафы; потом второе привидение закрыло те шкафы, номер которых делился на 2; затем третье приведение поменяло позиции (т. е. — открыло шкаф, если он был закрыт, и закрыло — если он был открыт) тех шкафов, номер которых делился на 3; следом за ним четвертое приведение поменяло позиции тех шкафов, номер которых делился на 4, и т. д. Как только тысячное привидение поменяло позицию тысячного шкафа — пропел петух и все привидения срочно убрались восвояси.

Не скажете ли Вы, сколько осталось открытых шкафов после посещения привидений?»

3. Шарыгин И. Ф., Ерганджиева Л. Н. Наглядная геометрия: Учебное пособие для учащихся V-VI классов. – М.: МИРОС. — 1995. – 240 с.: ил. Цена 6000 р.

Пособие, не имеющее аналогов в современной школьной практике, призвано способствовать развитию у учащихся геометрических представлений. Написанное живо и увлекательно, содержащее много красивых задач, оно может быть использовано как на уроках, так и во внеклассной работе. Много полезного в нем найдут и школьники для самостоятельных занятий. Приведем несколько цитат из книги.

«„Я думаю, что никогда до настоящего времени мы не жили в такой геометрический период. Все вокруг — геометрия.“ Эти слова, сказанные великим французским архитектором Ле Корбюзье в начале XX в., очень точно характеризуют наше время. Мир, в котором мы живем, наполнен геометрией домов и улиц, гор и полей, творениями природы и человека. Лучше ориентироваться в нем, открывать новое, понимать красоту и мудрость окружающего мира поможет вам эта книга.»

«Хорошее воображение — это качество, необходимое в равной степени и математику, и поэту. А может быть, математику даже в большей степени. Великий французский просветитель Вольтер как-то сказал: „В голове у Архимеда было гораздо больше воображения, чем в голове у Гомера.“»

«В геометрии очень важно уметь смотреть и видеть, замечать различные особенности геометрических фигур, делать выводы из замеченных особенностей. Эти умения, которые вместе можно назвать „геометрическим зрением“, необходимо постоянно тренировать и развивать.»

Параграф о координатах начинается с отрывка из Льюиса Кэролла:

> «...Но интересно, на какой же я широте и долготе? — продолжала Алиса. Сказать по правде, она понятия не имела о том, что такое широта и долгота, но ей очень нравились эти слова. Они звучали так важно и красиво!»

4. Произволов В. В. Задачи на вырост: Учебное пособие для внеклассных занятий по математике. — М.: МИРОС. — 1995. — 96 с.: ил. Цена 4800 р.

Учебное пособие составлено из авторских задач, в разные годы печатавшихся в журнале «Квант». Поразительно, сколько же прекрасных задач, известных нескольким поколениям математиков, принадлежит перу автора (кстати, в остальных трех книгах то и дело встречаются задачи В. В. Произволова). Для решения задач достаточно сведений, полученных при изучении математики в 7–11 классах. Пособие будет полезно не только любознательным школьникам, но и учителям математики, которые могут использовать нестандартные задачи и для внеклассной работы, и для оживления учебного процесса непосредственно на уроке. Вот несколько задач из этой книги.

1. На балу каждый кавалер танцевал с тремя дамами, а каждая дама — с тремя кавалерами. Докажите, что на балу число дам равнялось числу кавалеров.

2. Три одинаковых треугольника разрезаны по разноименным медианам. Сложите из шести полученных кусков один треугольник.

3. На стол положили несколько одинаковых листов бумаги прямоугольной формы. Оказалось, что верхний лист покрывает больше половины площади каждого из остальных листов. Можно ли в таком случае воткнуть булавку так, чтобы она проколола все листы?

4. Целые числа a, b и c таковы, что $ab + bc + ca = 0$. Докажите, что число abc может быть представлено в виде произведения квадрата целого числа на куб целого числа.

5. Квадратный лист бумаги разрезали на 6 кусков в форме выпуклых многоугольников. Пять кусков затерялись, остался один кусок в форме правильного восьмиугольника. Можно ли по одному этому восьмиугольнику восстановить исходный квадрат?

Издательство Московского Центра
непрерывного математического образования

Технический редактор М. Н. Вялый

Лицензия ЛР №040452 от 21.05.92 г.
Подписано в печать 05.06.97 г. Формат 70×100/16
Печать офсетная. Печ. л. 12.0.
Тираж 1000. Заказ

МЦНМО
121002, Москва, Б. Власьевский, 11.